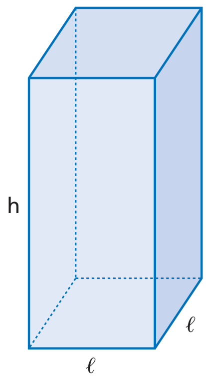
Quesito 3

Consideriamo un parallelepipedo rettangolo a base quadrata e indichiamo con l lo spigolo della base quadrata e con h l'altezza ($l, h > 0$):



L'area S della superficie totale vale $2l^2 + 4lh$.
Vogliamo rendere minima la somma delle lunghezze degli spigoli: $L = 8l + 4h = 4(2l + h)$. I valori di l e h che rendono minima la funzione L sono gli stessi che minimizzano la funzione $A = 2l + h$, data dalla somma delle tre dimensioni.
Da $S = 2l^2 + 4lh$ è possibile ricavare $h = \dfrac{S - 2l^2}{4l}$. Dato che $h > 0$, ne segue che

$$\frac{S - 2l^2}{4l} > 0 \quad \Rightarrow \quad S - 2l^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < l < \frac{\sqrt{2S}}{2}.$$

Sostituiamo in A l'espressione ottenuta per h:

$$A = A(l) = 2l + h = 2l + \frac{S - 2l^2}{4l} = \frac{6l^2 + S}{4l}.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$A'(l) = \frac{12l \cdot 4l - (6l^2 + S) \cdot 4}{16l^2} = \frac{6l^2 - S}{4l^2}.$$

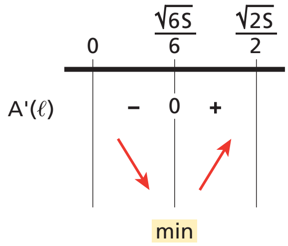
Troviamo gli zeri della derivata e studiamo il segno:

$$A'(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{6l^2 - S}{4l^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{\frac{S}{6}} = \frac{\sqrt{6S}}{6};$$

$$A'(l) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{6l^2 - S}{4l^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad 6l^2 - S > 0 \text{ (perché } 4l^2 > 0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad l > \sqrt{\frac{S}{6}} = \frac{\sqrt{6S}}{6} \text{ (perché } l > 0).$$

Compiliamo il quadro dei segni tenendo conto delle limitazioni:



Dunque $l = \frac{\sqrt{6S}}{6}$ è punto di minimo per la funzione $A(l)$ e soddisfa le limitazioni su l.
L'altezza del parallelepipedo vale

$$h = \frac{S - 2l^2}{4l} = \frac{S - 2 \cdot \frac{S}{6}}{4\sqrt{\frac{S}{6}}} = \frac{\sqrt{6S}}{6}\,.$$

Quindi il parallelepipedo a base quadrata la cui somma delle lunghezze degli spigoli è minima è in realtà un cubo; la somma delle lunghezze degli spigoli vale $12 \cdot \frac{\sqrt{6S}}{6} = 2\sqrt{6S}$.

