
SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA

20 giugno 2019

Svolgimento

Quesito 4

Un punto generico P dello spazio ha coordinate $P(x, y, z)$.

La sua distanza dai punti $A(2, 0, -1)$ e $B(-2, 2, 1)$ è:

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2}, \quad \overline{PB} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}.$$

Imponiamo la condizione $\overline{PA} = \sqrt{2} \cdot \overline{PB}$, equivalente a $\overline{PA}^2 = 2\overline{PB}^2$:

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2 = 2[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2].$$

Sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0$$

che è l'equazione di una superficie sferica S di centro

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right) \Rightarrow C\left(-\frac{12}{2}, -\frac{-8}{2}, -\frac{-6}{2}\right) \Rightarrow C(-6, 4, 3)$$

e raggio

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d} = \sqrt{\frac{12^2}{4} + \frac{(-8)^2}{4} + \frac{(-6)^2}{4} - 13} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6,93.$$

Verifichiamo che il punto $T(-10, 8, 7)$ appartiene alla superficie S mostrando che le sue coordinate soddisfano l'equazione della superficie:

$$(-10)^2 + 8^2 + 7^2 + 12 \cdot (-10) - 8 \cdot 8 - 6 \cdot 7 + 13 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 + 64 + 49 - 120 - 64 - 42 + 13 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \mathbf{Vero}.$$

Il vettore \vec{CT} , che rappresenta il raggio della superficie sferica passante per T , ha componenti

$$\vec{CT}(x_T - x_C, y_T - y_C, z_T - z_C) \Rightarrow \vec{CT}(-10 + 6, 8 - 4, 7 - 3) \Rightarrow \vec{CT}(-4, 4, 4).$$

Il piano α passante per T e tangente alla superficie S è lo stesso piano passante per T e perpendicolare a \vec{CT} . Se (r_x, r_y, r_z) sono le componenti di \vec{CT} , troviamo:

$$\alpha : r_x(x - x_T) + r_y(y - y_T) + r_z(z - z_T) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(x + 10) + 4(y - 8) + 4(z - 7) = 0 \Rightarrow -4x - 40 + 4y - 32 + 4z - 28 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x + 4y + 4z - 100 = 0 \Rightarrow x - y - z + 25 = 0.$$