SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA
20 giugno 2019

Svolgimento

Quesito 5

Stabiliamo innanzitutto il numero di casi possibili nel lancio di 4 dadi con facce numerate da 1 a 6: esso è $6^4 = 1296$.

- Calcoliamo la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5: ciò è equivalente a richiedere che la somma dei numeri usciti sia 4 (che avviene nell'unico caso in cui le uscite sono tutte 1), oppure che la somma dei numeri usciti sia 5 (che avviene se tre numeri sono 1 e un numero è 2). Per quest'ultima eventualità ci sono 4 casi possibili: $(1, 1, 1, 2)$, $(1, 1, 2, 1)$, $(1, 2, 1, 1)$ e $(2, 1, 1, 1)$. Quindi la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5 è uguale a $\frac{5}{1296}$.
- Calcoliamo la probabilità dell'evento E = «Il prodotto dei 4 numeri usciti è multiplo di 3»: ciò è equivalente a richiedere che almeno uno dei numeri usciti sia 3 oppure 6.
  Possiamo usare la probabilità dell'evento contrario $\bar{E}$ = «Il prodotto dei 4 numeri usciti non è multiplo di 3», che è equivalente a richiedere che non escano mai né il 3, né il 6. In tal caso i possibili esiti favorevoli per ogni dado sono 4 (infatti sono favorevoli le uscite 1, 2, 4, e 5), e perciò la probabilità richiesta è uguale a
  $$p(E) = 1 - p(\bar{E}) = 1 - \frac{4^4}{1296} = 1 - \frac{256}{1296} = \frac{1040}{1296} = \frac{65}{81}\,.$$
- Calcoliamo la probabilità dell'evento E = «Il massimo numero uscito è 4»: ciò è equivalente a richiedere che almeno un numero sia 4 e che nessun dei restanti sia 5 oppure 6.
  Per calcolare $p(E)$, consideriamo prima di tutto l'evento E_1 = «I numeri usciti sono tutti minori o uguali a 4»: in questo caso abbiamo $4^4 = 256$ possibilità e, ragionando nello stesso modo, $3^4 = 81$ è il numero dei casi per l'evento E_2 = «I numeri usciti sono tutti minori o uguali a 3». Osserviamo che $E_2 \subset E_1$ e che l'evento E è equivalente all'evento $E_1 - E_2$. Infatti il numero di casi favorevoli dell'evento E di cui si vuole calcolare la probabilità corrisponde a stabilire quante tra le 256 possibilità di numeri usciti minori o uguali a 4 presentano almeno un 4, escludendo quindi tutti i casi in cui tutti i numeri siano minori o uguali a 3. Il numero di casi favorevoli dell'evento E è uguale quindi alla differenza $256 - 81 = 175$. In conclusione, la probabilità richiesta è $p(E) = \frac{175}{1296}$.

  Il terzo punto si può risolvere anche, in alternativa, esprimendo la probabilità cercata come somma delle probabilità dei seguenti eventi incompatibili:

  1. Escono tutti 4:
     $$p_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^4.$$

2. Escono tre 4 e un numero minore di 4 (1, 2 o 3):

$$p_2 = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{3}{6}\right)^1.$$

3. Escono due 4 e due numeri minori di 4 (1, 2 o 3):

$$p_3 = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2.$$

4. Escono un 4 e tre numeri minori di 4 (1, 2 o 3):

$$p_4 = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^3.$$

Dunque:

$$p(E) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{6^4} + 4 \cdot \frac{3}{6^4} + 6 \cdot \frac{3^2}{6^4} + 4 \cdot \frac{3^3}{6^4} = \frac{1 + 12 + 54 + 108}{1296} = \frac{175}{1296}.$$

