Goniometria

nota bene

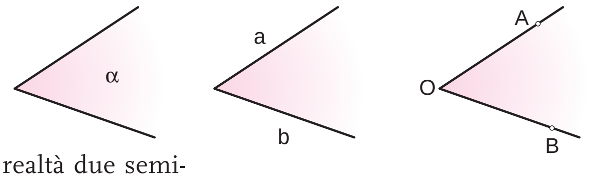
In questa unità vengono presentati i concetti di goniometria e trigonometria indispensabili per affrontare lo studio della topografia. Per tale ragione anche le convenzioni adottate saranno funzionali agli impieghi topografici.

La **goniometria** studia la misurazione degli angoli mettendoli in relazione con gli archi corrispondenti.

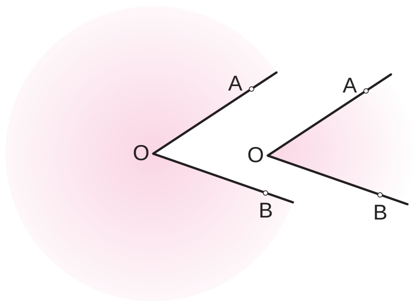
Infatti secondo un teorema della geometria esiste una proporzione diretta tra ampiezza di un angolo e lunghezza del relativo arco.

Angolo è la parte di piano delimitata da due semirette (*lati*) aventi la stessa origine (*vertice*).

Gli angoli sono indicati con lettere dell'alfabeto greco minuscolo (α, β, γ ....) oppure con le lettere dei due lati ($\widehat{ab}$) o anche con le lettere di due punti sui lati separate dalla lettera del vertice ($A\hat{O}B$).



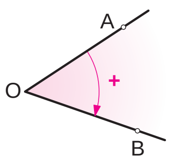
In realtà due semirette con la stessa origine dividono il piano in due parti; quindi con la notazione $A\hat{O}B$ si può registrare un'ambiguità. Essa scompare se usiamo la definizione di **angolo orientato**.



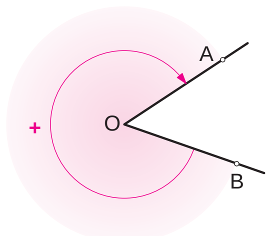
Un angolo si dice **orientato** quando si sceglie un lato come origine e un senso di rotazione.

La rotazione **oraria** è **positiva** e ovviamente negativa è quella antioraria (vedi *Nota bene*).

Per designare un angolo orientato si indica prima il lato origine o il punto sul lato origine, in modo da chiarire il verso di rotazione, poi il vertice e l'altro lato (o il punto sull'altro lato).



Angolo designato come $\widehat{AOB}$



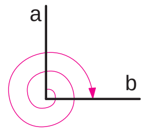
Angolo designato come $\widehat{BOA}$

nota bene

In ambito topografico si adotta la convenzione del verso orario come verso positivo; invece in matematica viene assunto come positivo il verso antiorario.

Le due convenzioni hanno origini storiche ormai lontane; in topografia sulla convenzione oraria è basato il funzionamento di strumenti di misura. Comunque il diverso orientamento influisce solo sulla definizione delle funzioni goniometriche ma non sui loro valori o sulle altre relazioni.

Gli angoli orientati possono avere ampiezze maggiori di un angolo giro; per esempio nella figura a fianco l'angolo $\widehat{ab}$ può essere considerato il frutto di due rotazioni complete più un angolo retto.



UNITÀ DI MISURA DEGLI ANGOLI

Radiante

Il radiante è l'unità di misura prevista dal Sistema Internazionale (SI).

Data una circonferenza, il radiante è l'ampiezza di un angolo sotteso da un arco di lunghezza pari al raggio.

Il simbolo del radiante è *rad*.

Un angolo giro viene misurato con il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il suo raggio R cioè

$$\frac{2\pi\ R}{R}\ \text{rad} = 2\pi\ \text{rad} = 6{,}28\ \text{rad}$$

Analogamente l'ampiezza dell'angolo piatto è π rad, mentre quella dell'angolo retto è $\pi/2$ rad.

Oltre al radiante, nei diversi settori scientifici sono impiegate anche le seguenti unità di misura.

Grado sessagesimale

Il grado sessagesimale è ampio 1/360 dell'angolo giro. Viene indicato dal simbolo °.

Quindi con questa unità di misura l'angolo giro è ampio 360°, l'angolo piatto 180°, l'angolo retto 90°.

Sottomultipli del grado sessagesimale sono:

- il minuto di grado (') equivalente a 1°/60;
- il secondo di grado ('') equivalente a 1'/60.

Un esempio di designazione in gradi sessagesimale e suoi sottomultipli: 55° 24' 32''.

Grado sessadecimale

Il grado sessadecimale (termine ottenuto dalla fusione di *sessagesimale* e *decimale*) è costituito dal grado sessagesimale per la parte intera e, separati dalla virgola, da sottomultipli decimali (decimi, centesimi, millesimi).

Un esempio di designazione in gradi sessadecimali: 55,409°.

Grado centesimale

Il grado centesimale ha un'ampiezza di 1/100 di angolo retto; i suoi sottomultipli, separati con la virgola dalla parte intera, sono espressi in decimi, centesimi e millesimi.

Simbolo del grado centesimale è *gon*.

In questa unità un angolo giro è ampio 400 gon, mentre l'angolo piatto è 200 gon.

Un esempio di designazione in gradi centesimali: 61,565 gon.

Unità	Angolo giro	Angolo piatto	Angolo retto	Sottomultipli	Indicazione
Radiante	2π rad	π rad	$\pi/2$ rad	mrad = $1/10^3$ rad µrad = $1/10^6$ rad	5,1989 rad
Grado sessagesimale	360°	180°	90°	1′ = 1/60° 1″= 1/60′ = 1/3600°	297°52′30″
Grado sessadecimale	360°	180°	90°	0,1° = 1/10° 0,01° = 1/100°	297,87503°
Grado centesimale	400 gon	200 gon	100 gon	cgon = 1/100 gon	330,9722 gon

CONVERSIONE TRA DIVERSE UNITÀ DI MISURA DEGLI ANGOLI

Dalle definizione delle diverse unità di misura si ricavano le seguenti proporzioni:

$$\alpha° : 180 = \alpha \text{ rad} : \pi$$

$$\alpha° : 90 = \alpha \text{ gon} : 100$$

$$\alpha \text{ gon} : 200 = \alpha \text{ rad} : \pi$$

Tramite queste proporzioni si possono convertire le misure da un'unità all'altra.
Prima di eseguire conversioni dei gradi sessagesimali è sempre utile convertirli prima in gradi sessadecimali; a tale scopo si convertono in gradi i primi e i secondi con le formule riportate in tabella.

Dal grado sessagesimale al grado sessadecimale

	Grado sessadecimale
Formule	1' = 1/60° 1" = 1/3600°
Esempio	36° 6' 18" = 36° + 6/60° + 18/3600° = 36° + 0,1° + 0,005° = 36,105°

Dal grado sessadecimale al centesimale e al radiante

	Grado centesimale	Radiante
Formule	$\alpha° \cdot 10/9 = \alpha$ gon	$\alpha° \cdot \pi/180 = \alpha$ rad
Esempio	45° convertito in gradi centesimali è $45° \cdot 10/9 = \pi/50$ gon	45° convertito in radianti è $45° \cdot \pi/180 = \pi/4$ rad

Dal radiante al grado sessadecimale e al centesimale

	Grado sessadecimale	Centesimale
Formule	$\alpha \text{ rad} \cdot 180/\pi = \alpha°$	$\alpha \text{ rad} \cdot 200/\pi = \alpha$ gon
Esempio	$\pi/3$ rad convertito in gradi sessadecimali è $\pi/3 \text{ rad} \cdot 180/\pi = 60°$	$\pi/3$ rad convertito in gradi centesimali è $\pi/3 \text{ rad} \cdot 200/\pi = 66{,}66$ gon

Dal grado centesimale al sessadecimale e al radiante

	Grado sessadecimale	Radiante
Formule	$\alpha \text{ gon} \cdot 9/10 = \alpha°$	$\alpha \text{ gon} \cdot \pi/200 = \alpha$ rad
Esempio	300 gon convertito in gradi sessadecimali è $300 \text{ gon} \cdot 9/10 = 270°$	300 gon convertito in radianti è $300 \text{ gon} \cdot \pi/200 = 3/2\,\pi$ rad

Confronto tra i valori di alcuni angoli nelle diverse unità

Grado sessadecimale	Grado centesimale	Radiante
15	16,66	$\pi/12$
30	33,33	$\pi/6$
45	50,00	$\pi/4$
60	66,66	$\pi/3$
75	83,33	$5\pi/12$
90	100,00	$\pi/2$
105	116,66	$7\pi/12$
120	133,33	$2\pi/3$
135	150,00	$3\pi/4$
150	166,66	$5\pi/6$
165	183,33	$11\pi/12$
180	200,00	π
195	216,66	$13\pi/12$
210	233,33	$7\pi/6$
225	250,00	$5\pi/4$
240	266,66	$4\pi/3$
255	283,33	$17\pi/12$
270	300,00	$3\pi/2$
285	316,66	$19\pi/12$
300	333,33	$5\pi/3$
315	350,00	$7\pi/4$
330	366,66	$11\pi/6$
345	383,33	$23\pi/12$
360	400,00	$2\,\pi$

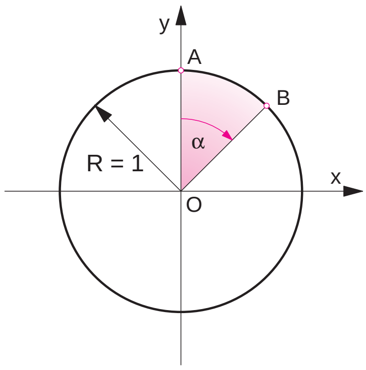
Funzioni goniometriche

CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

La circonferenza goniometrica è una circonferenza di raggio unitario (R = 1) con centro nell'origine degli assi cartesiani x e y.

L'asse y è l'origine degli angoli orientati, il cui verso positivo è quello orario; il punto A sull'asse y è origine degli archi.

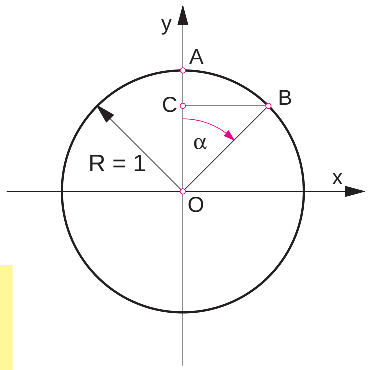
A ogni arco della circonferenza è associato un angolo e viceversa (*corrispondenza biunivoca*); in figura ad α corrisponde $\overset{\frown}{AB}$. È quindi indifferente parlare di angoli oppure di archi orientati.



Con precise relazioni agli angoli sono associati altri elementi: le *funzioni goniometriche*.

FUNZIONI SENO E COSENO

A un angolo α è associato l'arco $\overset{\frown}{AB}$ e quindi il punto B, le cui coordinate hanno come valori le lunghezze dei segmenti BC e OC; dunque queste due lunghezze sono funzione dell'angolo α.



Si chiama **seno** il rapporto tra $\overline{BC}$ e $\overline{OB}$. Il **coseno** è il rapporto tra $\overline{OC}$ e $\overline{OB}$.

La funzione seno dell'angolo α è indicata con *sen* α, mentre *cos* α indica il coseno.

$\overline{OB}$ nella circonferenza goniometrica ha valore 1 e quindi le funzioni seno e coseno hanno valore rispettivamente pari a $\overline{BC}$ e $\overline{OC}$, cioè le coordinate cartesiane del punto B, ovvero:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BC}}{1} = X_B \qquad \cos\alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{1} = Y_B$$

Le funzioni goniometriche, essendo rapporti tra grandezze omogenee (lunghezze di segmenti), sono **numeri puri**. Notando infine che il triangolo OBC è un triangolo rettangolo, sulla base del teorema di Pitagora si ottiene che

$$\overline{BC}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 = 1^2 = 1$$

da cui si ricava la ***prima relazione fondamentale della goniometria***

$$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha = 1$$

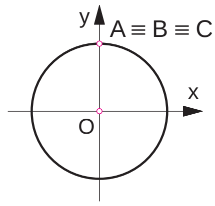
nota bene

Le definizioni di seno e coseno sono legate alla convenzione dell'angolo orientato (verso orario positivo) e all'assunzione dell'asse y come origine. Laddove sono assunte convenzioni opposte (in ambito matematico) le definizioni delle funzioni sono invertite.
Ciò comunque non influisce sui loro valori e sulle relazioni.

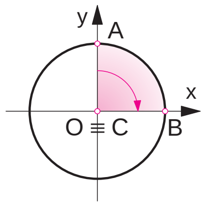
VARIAZIONE DELLE FUNZIONI SENO E COSENO

Studiando le variazioni di seno e coseno al variare dell'angolo α, si può notare che:

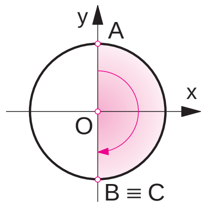
quando α = 0° (0 gon) si verifica che A ≡ B ≡ C e quindi
sen 0° = $\overline{BC}$ = 0
cos 0° = $\overline{OC}$ = 1



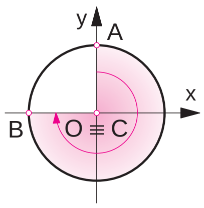
quando α = 90° (100 gon) si verifica che O ≡ C e quindi
sen 90° = $\overline{BC}$ = 1
cos 90° = $\overline{OC}$ = 0



quando α = 180° (200 gon) si verifica che B ≡ C e quindi
sen 180° = $\overline{BC}$ = 0
cos 180° = $\overline{OC}$ = –1



quando α = 270° (300 gon) si verifica che O ≡ C e quindi
sen 270° = $\overline{BC}$ = –1
cos 270° = $\overline{OC}$ = 0



quando α = 360° (400 gon) si ripetono i valori di 0° e quindi
sen 360° = $\overline{BC}$ = 0
cos 360° = $\overline{OC}$ = 1

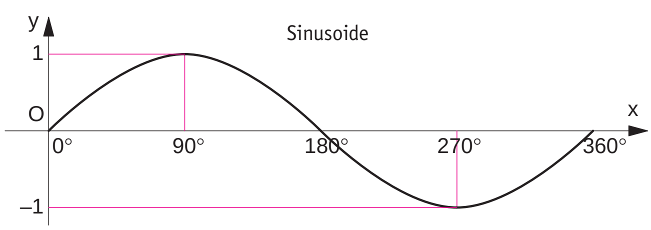
per α > 360° si ripetono **periodicamente** gli stessi valori precedenti, sempre compresi tra –1 e 1.

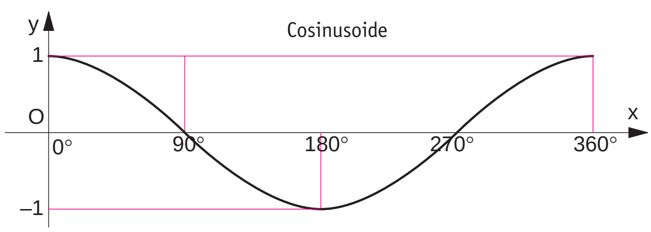
Dalle precedenti osservazioni e mediante relazioni geometriche si possono facilmente calcolare i valori delle funzioni seno e coseno di angoli particolarmente importanti, detti *angoli notevoli* (v. tabella a fianco).

Angolo	Seno	Coseno
0°	0	1
30°	1/2	$\sqrt{3}/2$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60°	$\sqrt{3}/2$	1/2
90°	1	0
180°	0	–1
270°	–1	0
360°	0	1

Volendo rappresentare graficamente le variazioni delle funzioni seno e coseno, su una coppia di assi cartesiani si possono riportare sull'asse x i valori degli angoli e sull'asse y i valori della funzione goniometrica.

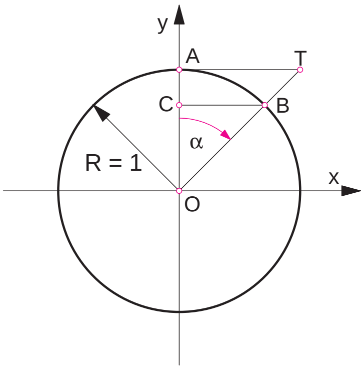
La curva che rappresenta la funzione seno ha una forma specifica chiamata **sinusoide**, mentre è detta **cosinusoide** quella del coseno.





FUNZIONI TANGENTE E COTANGENTE

In una circonferenza goniometrica si traccia la tangente geometrica per il punto A, origine degli archi e degli angoli, e si trova T, intersezione con la prosecuzione del raggio OB. Il segmento AT è funzione dell'angolo α; questa funzione goniometrica prende il nome di **tangente**.



Si chiama **tangente** di un angolo l'ascissa del punto d'intersezione tra la tangente geometrica alla circonferenza goniometrica nel punto di origine degli angoli e il lato terminale dell'angolo stesso.

La tangente di un angolo α viene indicata con *tg* α.

Osservando la figura si può notare che i triangoli OCB e OAT sono simili, pertanto tra i loro lati sussiste la proporzione

$$\overline{AT} : \overline{CB} = \overline{OA} : \overline{OC}$$

Sostituendo in essa le funzioni goniometriche già note si ha

$$\text{tg}\ \alpha : \text{sen}\ \alpha = 1 : \cos \alpha$$

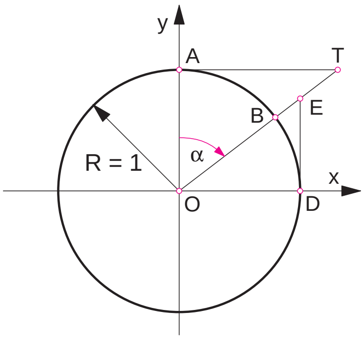
e quindi

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$$

che è la ***seconda relazione fondamentale della goniometria***.

Se nella precedente figura aggiungiamo la tangente geometrica per il punto D (estremo del primo quadrante), possiamo individuare il punto E su OT (lato terminale dell'angolo α).

Il segmento DE è anch'esso funzione di α, ed è chiamato **cotangente**.



La **cotangente** di un angolo è l'ordinata del punto d'intersezione tra la tangente geometrica alla circonferenza goniometrica nell'estremo del primo quadrante e il lato terminale dell'angolo stesso.

La cotangente di un angolo α viene indicata con *cotg* α.

Osservando la figura si può notare che i triangoli ODE e OAT sono simili, pertanto tra i loro lati sussiste la proporzione:

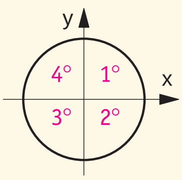
$$\overline{DE} : \overline{OA} = \overline{OD} : \overline{OT}$$

Sostituendo in essa le funzioni goniometriche già note, si ha

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha} \quad \text{da cui} \quad \text{cotg}\ \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen}\ \alpha}$$

memo

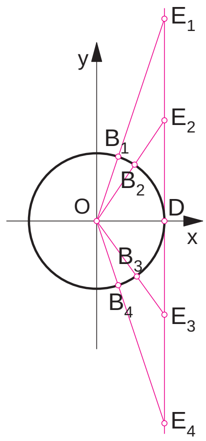
Nella circonferenza goniometrica gli assi cartesiani dividono il piano in quattro ***quadranti***, indicati come in figura a lato.

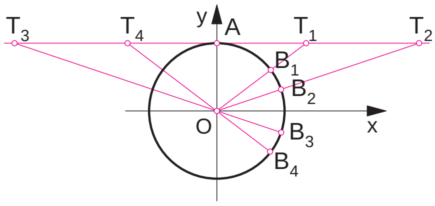


VARIAZIONE DELLE FUNZIONI TANGENTE E COTANGENTE

Studiando le variazioni di tangente e cotangente al variare dell'angolo α, si può notare che:

- per α = 0° (0 gon) si verifica che
  tg α = 0 cotg 0° = ± ∞
- per α = 90° (100 gon) si verifica che
  tg 90° = ± ∞ cotg 90° = 0
- per α = 180° (200 gon) si verifica che
  tg 180° = 0 cotg 180° = ± ∞
- per α = 270° (300 gon) si verifica che
  tg 270° = ± ∞ cotg 270° = 0
- per α = 360° (400 gon) si verifica che
  tg 360° = 0 cotg 360° = ± ∞
- per α > 360° (400 gon) si ripetono **periodicamente** gli stessi valori precedenti, sempre compresi tra 0 e ± ∞.





La funzione tg α coincide con la lunghezza del segmento AT; crescendo l'angolo, il segmento AT dal valore 0 aumenta con valori positivi fino all'angolo di 90° (qui ha un valore infinito, ∞), oltre il quale diviene negativo e tende al valore 0 quando α = 180°. Con analogo andamento la funzione tg α cresce con valori positivi fino a 270° (dove ha valore ∞) e di nuovo tende al valore 0 verso 360°.

La funzione cotg α coincide con la lunghezza del segmento ED; quando α = 0, la funzione cotg α ha un valore positivo e infinito (∞). Essa diminuisce fino a 90° (dove ha valore 0) per poi aumentare con valori negativi fino a 180° (dove ha valore ∞); in seguito passa a valori positivi che tendono al valore 0 sui 270° e ancora negativi verso il valore ∞ a 360°.

Dalle precedenti osservazioni e mediante relazioni con le funzioni seno e coseno, calcolare i valori delle funzioni tangente e cotangente di *angoli notevoli* (v. tabella a fianco).

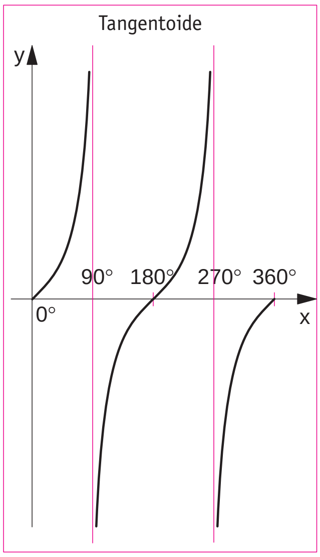
Angolo	Tangente	Cotangente
0°	0	$\pm\infty$
30°	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	1	1
60°	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
90°	$\pm\infty$	0
180°	0	$\pm\infty$
270°	$\pm\infty$	0
360°	0	$\pm\infty$

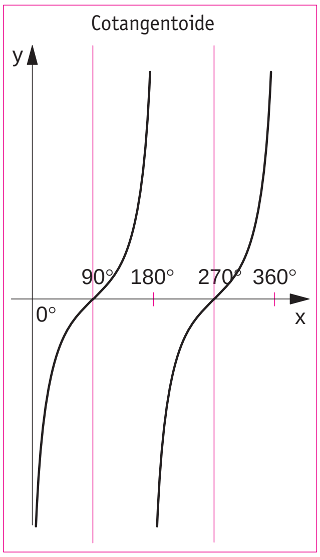
Volendo rappresentare graficamente le variazioni delle funzioni tangente e cotangente, su una coppia di assi cartesiani si possono riportare sull'asse x i valori degli angoli e sull'asse y i valori della funzione goniometrica.

La curva che rappresenta la funzione tangente è chiamata **tangentoide**, mentre è detta **cotangentoide** quella della cotangente.

nota bene

Anche le definizioni di tangente e cotangente sono legate alla convenzione dell'angolo orientato (verso orario positivo) e all'assunzione dell'asse y come origine.
Laddove sono assunte convenzioni opposte (in ambito matematico) le definizioni delle funzioni sono invertite, senza che ciò influisca sui loro valori e sulle relazioni.





FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

Le funzioni goniometriche inverse permettono di determinare l'angolo che ha un dato valore per una certa funzione goniometrica.

Per poter individuare il valore assunto dalla funzione inversa è necessario che l'angolo sia compreso entro un certo intervallo.

- **Arcoseno**

> *Arcoseno* è l'angolo che presenta un determinato valore di seno.

Scrivendo **y = arcsen x**, intendiamo che y è l'angolo il cui seno è x, e quindi che $x = \text{sen } y$.
Tra le due funzioni $y = \text{arcsen } x$ e $x = \text{sen } y$ c'è un rapporto biunivoco solo se l'angolo y è compreso tra –90° e 90° ($\mathbf{-90° \le y \le 90°}$).
Esempio: arcsen 1 = 90° in quanto sen 90° = 1

- **Arcocoseno**

> *Arcocoseno* è l'angolo che presenta un determinato valore di coseno.

La funzione **y = arccos x** è in rapporto biunivoco con $x = \cos y$ solo se $\mathbf{0° \le y \le 180°}$.
Esempio: arccos 1 = 0° in quanto cos 0° = 1

- **Arcotangente**

> *Arcotangente* è l'angolo che presenta un determinato valore di tangente.

La funzione **y = arctg x** è in rapporto biunivoco con $x = \text{tg } y$ solo se $\mathbf{-90° \le y \le 90°}$.
Esempio: arctg 1 = 45° in quanto tg 45° = 1

- **Arcocotangente**

> *Arcocotangente* è l'angolo che presenta un determinato valore di cotangente.

La funzione **y = arccotg x** è in rapporto biunivoco con $x = \text{cotg } y$ solo se $\mathbf{0° \le y \le 180°}$.
Esempio: arccotg 0 = 90° in quanto cotg 90° = 0

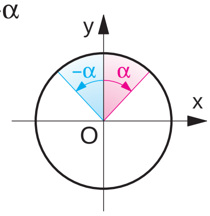
FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI ASSOCIATI

Sono detti *angoli associati* a un angolo α quegli angoli la cui somma o differenza con α abbia i seguenti valori: 0°, 90°, 180°, 270° e 360°.

I valori delle loro funzioni goniometriche sono ricavabili da quelle di α.

Angoli opposti (la cui somma è 0°)

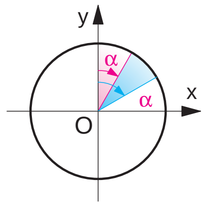
α e –α



sen (–α) = – sen α
cos (–α) = cos α
tg (–α) = – tg α
cotg (–α) = – cotg α

Angoli complementari (la cui somma è 90°)

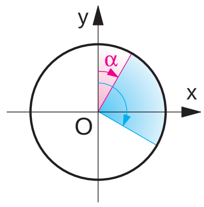
α e 90° – α



sen (90°–α) = cos α
cos (90°–α) = sen α
tg (90°–α) = cotg α
cotg (90°–α) = tg α

Angoli la cui differenza è 90°)

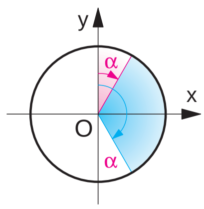
α e 90° + α



sen (90°+α) = cos α
cos (90°+α) = – sen α
tg (90°+α) = – cotg α
cotg (90°+α) = – tg α

Angoli supplementari (la cui somma è 180°)

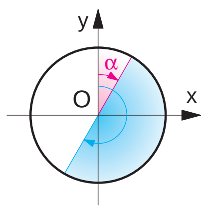
α e 180° – α



sen (180°–α) = sen α
cos (180°–α) = – cos α
tg (180°–α) = – tg α
cotg (180°–α) = – cotg α

Angoli la cui differenza è 180°

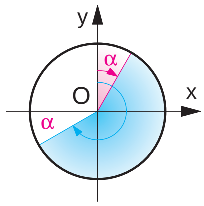
α e 180° + α



sen (180°+α) = – sen α
cos (180°+α) = – cos α
tg (180°+α) = tg α
cotg (180°+α) = cotg α

Angoli la cui somma è 270°

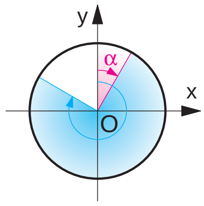
α e 270° – α



sen (270°–α) = – cos α
cos (270°–α) = – sen α
tg (270°–α) = cotg α
cotg (270°–α) = tg α

Angoli la cui differenza è 270°

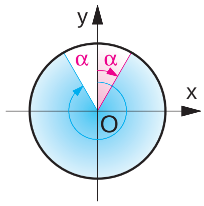
α e 270° + α



sen (270°+α) = – cos α
cos (270°+α) = sen α
tg (270°+α) = – cotg α
cotg (270°+α) = – tg α

Angoli esplementari (la cui somma è 360°)

α e 360° – α



sen (360°–α) = – sen α
cos (360°–α) = cos α
tg (360°–α = – tg α
cotg (360°–α) = – cotg α

FORMULE GONIOMETRICHE

Per esprimere una funzione goniometrica di una combinazione (somma, differenza, ecc.) di angoli attraverso funzioni dei singoli angoli, ci si può avvalere delle seguenti formule.

- **Formule di addizione**

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$$

$$\text{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$$

- **Formule di sottrazione**

$$\text{sen}\,(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$$

$$\text{tg}\,(\alpha-\beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$$

- **Formule di duplicazione**

$$\text{sen}\,(2\alpha) = 2\,\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha$$

$$\text{tg}\,(2\alpha) = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\,\alpha}$$

- **Formule di bisezione**

$$\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Trigonometria

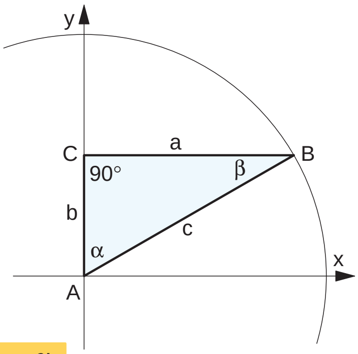
La **trigonometria** si occupa dei triangoli di cui si vogliono conoscere elementi (angoli o lati) incogniti partendo da tre o più elementi noti, tra cui almeno un lato.

A tale scopo sono indispensabili le relazioni che legano le misure dei lati con le funzioni trigonometriche degli angoli.

TRIANGOLI RETTANGOLI

Dalla definizione delle funzioni goniometriche si possono trarre relazioni utili alla risoluzione dei triangoli rettangoli. In questo caso peraltro è sempre noto un elemento, cioè l'angolo retto, e quindi basteranno altri due elementi (due lati oppure un lato e un angolo).

All'interno di una circonferenza goniometrica il triangolo rettangolo ABC presenta le seguenti relazioni basate sulle definizioni di seno e coseno:
sen α = a / c
cos α = b / c

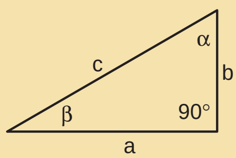


da cui si ricavano:

a = c · sen α   b = c · cos α
e
c = a / sen α   c = b / cos α

Attraverso relazioni geometriche e goniometriche con altre funzioni si ricavano le seguenti formule risolutive per i triangoli rettangoli.

FORMULE RELATIVE AI TRIANGOLI RETTANGOLI



cateto = ipotenusa · seno dell'angolo opposto	a = c · sen α b = c · sen β
cateto = ipotenusa · coseno dell'angolo adiacente	b = c · cos α a = c · cos β
ipotenusa = cateto / seno dell'angolo opposto	c = a / sen α c = b / sen β
ipotenusa = cateto / coseno dell'angolo adiacente	c = b / cos α c = a / cos β
cateto = altro cateto · tangente dell'angolo opposto al primo	a = b · tg α b = a · tg β
cateto = altro cateto · cotangente dell'angolo adiacente al primo	a = b · cotg β b = a · cotg α

glossario
Trigonometria: dal greco *trigonon*, triangolo, e *métron*, misura.

• **Problema 1**

Determinare la lunghezza dei lati di un triangolo rettangolo di cui è nota l'ipotenusa (25,32 m) e l'angolo α (35,4°).

Per trovare il lato a si applica la formula $a = c \cdot \text{sen}\,\alpha$, da cui si ricava

$$a = 25{,}32\ \text{m} \cdot \text{sen}\ 35{,}4° = 25{,}32\ \text{m} \cdot 0{,}579 = 14{,}66\ \text{m}$$

Il lato b si ottiene con

$$b = 25{,}32\ \text{m} \cdot \cos 35{,}4° = 25{,}32\ \text{m} \cdot 0{,}815 = 20{,}63\ \text{m}$$

• **Problema 2**

Determinare la lunghezza dei lati di un triangolo rettangolo di cui è noto il cateto a (44,25 m) e l'angolo a esso opposto (α = 60,52°).

L'ipotenusa c si ottiene con la formula $c = a\ /\ \text{sen}\,\alpha$, da cui si ricava

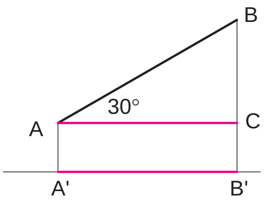
$$c = 44{,}25\ \text{m}\ /\ \text{sen}\ 60{,}52° = 44{,}25\ \text{m}\ /\ 0{,}870 = 50{,}86\ \text{m}$$

Il cateto b si ottiene con $a = b \cdot \text{tg}\,\alpha$, da cui $b = a\ /\ \text{tg}\,\alpha$ e quindi

$$b = 44{,}25\ \text{m}\ /\ \text{tg}\ 60{,}52° = 44{,}25\ \text{m}\ /\ 1{,}768 = 25{,}01\ \text{m}$$

• **Problema 3**

Determinare la lunghezza della proiezione di un segmento AB su una retta che forma con esso un angolo di 30°.



A'B' proiezione di AB sulla retta è uguale al segmento AC; pertanto

$$\overline{A'B'} = \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \cos 30° = \overline{AB} \cdot 0{,}866$$

TRIANGOLI SCALENI

Per risolvere i problemi sui triangoli scaleni (cioè con angoli qualsiasi) è sufficiente disporre dei risultati dei due teoremi seguenti.

Teorema dei seni

In un triangolo i lati e i seni degli angoli opposti hanno un rapporto costante, equivalente al diametro della circonferenza circoscritta.

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = 2R$$

Queste relazioni equivalgono a:
$a\ /\ b = \text{sen}\,\alpha\ /\ \text{sen}\,\beta$
$b\ /\ c = \text{sen}\,\beta\ /\ \text{sen}\,\gamma$
$a\ /\ c = \text{sen}\,\alpha\ /\ \text{sen}\,\gamma$

nota bene

Per trovare i valori delle funzioni trigonometriche è sufficiente disporre di una **calcolatrice scientifica**.

memo

In un triangolo la somma degli angoli interni equivale a un angolo piatto (180° oppure 200 gon).

Teorema di Carnot (o del coseno)

In un triangolo il quadrato di un lato equivale alla somma dei quadrati degli altri due lati, diminuita del doppio prodotto di questi due lati per il coseno dell'angolo fra essi compreso.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

e analogamente

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\ a \cdot c \cdot \cos\beta \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2\ a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

È da notare che questo non è altro che il **teorema di Pitagora generalizzato**; infatti, nel caso di un triangolo rettangolo, si ha che α = 90° e quindi

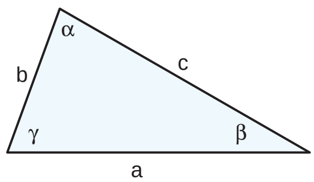
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ b \cdot c \cdot \cos 90°$$

e, poiché cos 90° = 0, otteniamo la formula ben nota

$$a^2 = b^2 + c^2$$

• **Problema 4**

Noti un lato e due angoli (a = 20 m; β = 30°; γ = 70°), determinare gli altri elementi del triangolo.



Il valore di α si individua con $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, dove si inseriscono i valori noti e si ha

$$\alpha = 180° - (30° + 70°) = 80°$$

Dal teorema dei seni sappiamo che

$$b = a \cdot \text{sen}\,\beta\ /\ \text{sen}\,\alpha$$

e quindi

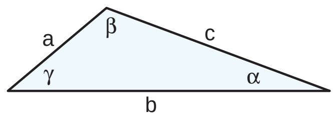
$$b = 20\ \text{m} \cdot \text{sen}\ 30°\ /\ \text{sen}\ 80° = 20\ \text{m} \cdot 0{,}5\ /\ 0{,}984 = 10{,}16\ \text{m}$$

Con lo stesso teorema dei seni si ricava il lato c:

$$c = 20\ \text{m} \cdot \text{sen}\ 70°\ /\ \text{sen}\ 80° = 20\ \text{m} \cdot 0{,}939\ /\ 0{,}984 = 19{,}08\ \text{m}$$

• **Problema 5**

Noti due lati e l'angolo fra essi compreso (a = 20 m; b = 50; γ = 40°), determinare gli altri elementi del triangolo.



Il lato c si trova con il teorema di Carnot e la sua formula $c^2 = a^2 + b^2 - 2\ a \cdot b \cdot \cos\gamma$, dove si inseriscono i valori noti e si ha

$$c = \sqrt{20^2 + 50^2 - 2 \cdot 20 \cdot 50 \cdot \cos 40°} = 37\ \text{m}$$

Dallo stesso teorema sappiamo che

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

da cui si ricava

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ b \cdot c}$$

quindi $\cos\alpha = 0{,}937$
e $\alpha = \arccos 0{,}937 = 20°$

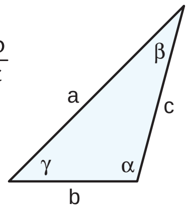
Infine si determina $\beta = 180° - 20° - 40° = 120°$

• Problema 5

Noti due lati e un angolo opposto a uno di essi ($b = 17$ m; $c = 24$; $\gamma = 45°$), determinare gli altri elementi di un triangolo.

Dal teorema dei seni si ha

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \quad \text{da cui} \quad \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\gamma\,\frac{b}{c}$$



Sostituendo i valori noti si ha

$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} 45° \cdot 17 \text{ m} / 24 \text{ m} = 0{,}5$

e quindi

$\beta = \operatorname{arcsen} 0{,}5 = 30°$

È da notare che gli angoli il cui seno è 0,5 sono due (30° e 150°), ma solo il primo valore è accettabile; infatti, se fosse $\beta = 150°$, la somma $\beta + \gamma = 195° > 180°$ (valore inaccettabile per un triangolo).

L'angolo α si ricava da $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 105°$.

Infine il lato a si ottiene ancora con il teorema dei seni, ovvero, con la formula $a = b \cdot \operatorname{sen}\alpha / \operatorname{sen}\beta$,

si ottiene

$a = 17 \text{ m} \cdot \operatorname{sen} 105° / \operatorname{sen} 30° = 17 \text{ m} \cdot 0{,}966 / 0{,}5 = 32{,}84 \text{ m}$

• Problema 6

Noti i tre lati lati ($a = 30$ m; $b= 40$; $c = 50$), determinare gli altri elementi del triangolo.

Con il teorema di Carnot si ha

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b \cdot c} = \frac{40^2 + 50^2 - 30^2}{2 \cdot 40 \cdot 50} = \frac{3200}{4000} = 0{,}8$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a \cdot c} = \frac{30^2 + 50^2 - 40^2}{2 \cdot 30 \cdot 50} = \frac{1800}{3000} = 0{,}6$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a \cdot b} = \frac{30^2 + 40^2 - 50^2}{2 \cdot 30 \cdot 40} = \frac{0}{2400} = 0$$

da cui

$\alpha = \arccos 0{,}8 = 36{,}9°$

$\beta = \arccos 0{,}6 = 53{,}1°$

$\gamma = \arccos 0 = 90°$

Area del triangolo

Dalla formula geometrica $S = b \cdot h / 2$, espressa mediante le funzioni goniometriche, si hanno le seguenti formule basate su diversi elementi noti.

FORMULE RELATIVE ALL'AREA DEL TRIANGOLO	
Noti due lati e l'angolo compreso (per es. b, c, α)	$S = \dfrac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2}$
Noti due angoli e il lato compreso (per es. α, β, c)	$S = \dfrac{c^2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{2\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$

Per il calcolo dell'area di un triangolo è anche nota dalla geometria la **formula di Erone**, che esprime l'area conoscendo i tre lati (a,b,c) e quindi anche il semiperimetro p, cioè

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

POLIGONI

Per risolvere i problemi sui poligoni bisogna scomporli in triangoli.
Una proprietà importante a tal fine è la seguente:

> la somma degli angoli interni ($\Sigma\alpha$) di un poligono è pari a tanti angoli piatti quanto il numero di lati (n) diminuito di due.

$$\Sigma\alpha = (n-2) \cdot 180°$$

Nel caso di un quadrilatero la somma degli angoli interni è 360°.

> Per poter risolvere un poligono di n lati bisogna conoscere almeno (2n – 3) elementi, dei quali almeno (n–2) lati.

Quindi per risolvere un quadrilatero bisogna conoscere almeno 5 elementi tra cui un minimo di 2 lati.
Vediamo come operare nel caso dei quadrilateri.

Quadrilateri

Nella divisione in due triangoli si sceglie la diagonale che permette di avere un triangolo risolvibile con gli elementi noti. Quindi si passa all'altro triangolo ora risolvibile con i nuovi elementi; infine si ricompongono elementi angolari parziali.

• Problema 8

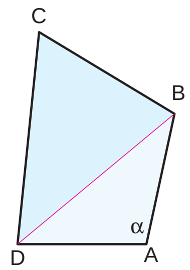
Sono noti 4 lati e un angolo.

Si divide il quadrilatero con la diagonale BD che non taglia l'angolo α noto.

Si risolve il triangolo ABD di cui si conoscono due lati e l'angolo compreso.

Conoscendo ora la diagonale BD, si può risolvere anche il triangolo BCD.

Sommando gli angoli in B e in D si definiscono tutti gli elementi del quadrilatero.



• Problema 9

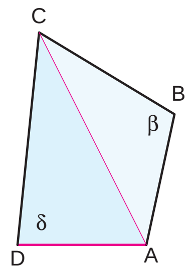
Sono noti 3 lati e 2 angoli tra loro opposti.

Si divide il quadrilatero con la diagonale AC che non taglia i due angoli β e δ noti.

Si risolve il triangolo ABC di cui si conoscono due lati e l'angolo compreso.

Conoscendo ora la diagonale AC, si può risolvere anche il triangolo ACD.

Sommando gli angoli in A e in C si definiscono tutti gli elementi del quadrilatero.



• Problema 10

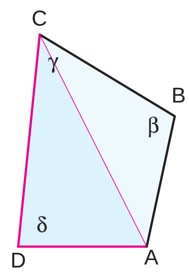
Sono noti 2 lati e 3 angoli.

Dagli angoli noti (α, β, γ) si ricava

$\alpha = 360° - (\beta + \gamma + \delta)$

Si risolve il triangolo ABC di cui si conoscono due lati e l'angolo compreso.

I nuovi dati sono AC e gli angoli di ABC; con questi ultimi si ottengono per differenza da α e γ gli angoli del triangolo ACD; quest'ultimo è ora risolvibile perché sono noti 3 angoli e un lato.



Esercitazioni

UNITÀ DI MISURA DI ANGOLI E CONVERSIONI

1. Se in un triangolo rettangolo uno degli angoli acuti è ampio $\pi/6$ rad, quale ampiezza avrà l'altro angolo acuto? Esprimerla in radianti, in gradi sessagesimali e in gradi centesimali.
[$\pi/3$ rad = 60° = 66,66 gon]

2. In un triangolo isoscele l'angolo al vertice è ampio 30°; quale ampiezza avrà ognuno degli angoli alla base? Esprimerla in gradi sessagesimali, in radianti e in gradi centesimali.
[75° = $5\pi/12$ rad = 83,33 gon]

3. Convertire in angoli sessadecimali i seguenti valori sessagesimali:
61°30' [61,500°]
30°30'30'' [30,508°]
27°12'36'' [27,210°]
18°25'30'' [18,425°]

4. Convertire in angoli centesimali i seguenti valori sessadecimali:
162° [180 gon]
41,4° [46 gon]
270,9° [301 gon]
35,12° [39,022 gon]

5. Convertire in radianti i seguenti valori sessadecimali:
135,0° [$3\pi/4$ rad = 2,356 rad]
22,5° [$\pi/8$ rad = 0,392 rad]
57,295 [1 rad]
200,535° [3,5 rad]

6. Convertire in gradi sessadecimali i seguenti valori in radianti:
$4\pi/5$ rad [144°]
2 rad [114,591°]
3,49 rad [200°]
6,283 rad [360°]

7. Convertire in gradi centesimali i seguenti valori in radianti:
4 rad [254,647 gon]
$3\pi/4$ rad [150 gon]
3,48 rad [221,543 gon]
5,5 rad [350,140 gon]

8. Convertire in gradi sessadecimali i seguenti valori centesimali:
25 gon [22,5°]
280 gon [252°]
233,333 gon [210°]
122,5 gon [110,25°]

9. Convertire in radianti i seguenti valori centesimali:
20 gon [$\pi/10$ rad = 0,314 rad]
250 gon [$5\pi/4$ rad = 3,926 rad]
381,97 gon [6 rad]
316,66 gon [$19\pi/12$ rad = 4,974 rad]

FUNZIONI GONIOMETRICHE

10. Quale angolo compreso tra 0° e 90° ha lo stesso valore per il seno e per il coseno? [45°]

11. Con un periodo di 360° la funzione seno assume valori compresi entro quale intervallo?
[$-1 \leq \text{sen}\,\alpha \leq 1$]

12. Se $0° \leq \alpha \leq 360°$ per quali angoli si verifica $\cos\alpha = 0$?
[90° e 270°]

13. Qual è la prima relazione fondamentale della goniometria?
[$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$]

14. Qual è la seconda relazione fondamentale della goniometria?
[$\text{tg}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha \,/\, \cos\alpha$]

15. Calcolare i valori delle seguenti espressioni:
$2\,\text{sen}\,90° + 3\,\text{sen}\,180° + 4\,\text{sen}\,270°$ [–2]
$3\cos\pi/2 - 2\,\text{sen}\,(3/2\,\pi) + 3\,\text{tg}\,\pi/4$ [5]
$2\,\text{tg}\,\pi + 2\,\text{cotg}\,\pi/4 + 2\,\text{sen}^2\,\pi/2$ [4]
$2\cos 60° + 2\,\text{sen}^2\,45° + 3\cos^2 180°$ [5]

16. Calcolare il valore di $\cos\alpha$ sapendo che:
$\text{sen}\,\alpha = 3/5$ e $0° < \alpha < 90°$ [4/5]
$\text{sen}^2\,\alpha = 3/4$ e $0° < \alpha < 90°$ [1/2]

17. Calcolare il valore di $\text{sen}\,\alpha$ sapendo che:
$\cos\alpha = -2/3$ e $180° < \alpha < 270°$ [$-\sqrt{5}/3$]
$\cos^2\alpha = 1/4$ e $0° < \alpha < 90°$ [$\sqrt{3}/2$]

18. Calcolare il valore di $\text{tg}\,\alpha$ sapendo che:
$\text{sen}\,\alpha = -15/17$ e $180° < \alpha < 270°$ [15/8]
$\cos\alpha = -8/17$ e $90° < \alpha < 180°$ [–15/8]

FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

19. Calcolare i valori delle seguenti espressioni:
$\arcsin 1/2 + \text{arctg}\,(1/\sqrt{3}) - \arccos(\sqrt{3}/2)$ [30°]
$\arccos(-1) - \arcsin 1/2$ [150°]
$\arccos(\sqrt{2}/2) + \arcsin(\sqrt{3}/2)$ [105°]
$\pi - \text{arctg}\,(-1)$ [$\pi/4$]

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI ASSOCIATI

20. Se α e β sono complementari (cioè $\alpha + \beta = 90°$) e $\text{sen}\,\alpha = 3/4$, che valore avrà $\cos\beta$? [3/4]

21. Se $\beta = 90° + \alpha$ e si sa che $\text{tg}\,\alpha = 6$, che valore ha $\text{cotg}\,\beta$?
[–6]

22. Se α e β sono supplementari (cioè $\beta = 180° - \alpha$) e $\cos\alpha = 0{,}25$, che valore avrà $\cos\beta$? [–0,25]

23. Se $\beta = 270° + \alpha$ e si sa che $\text{cotg}\,\alpha = -10$, che valore ha $\text{tg}\,\beta$? [10]

FORMULE GONIOMETRICHE

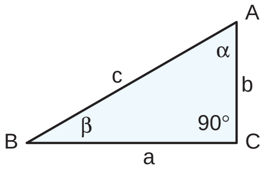
24. Mediante le formule di addizione trovare il valore di:
sen 75° (osservando che 75° = 30° + 45°) $\left[\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right]$
cos 105°(osservando che 105° = 45° + 60°) $\left[\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right]$

25. Mediante le formule di sottrazione trovare il valore di:
cos 15° (osservando che 15° = 45° – 30°) $\left[\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right]$
tg 15° (osservando che 15° = 45° – 30°) $\left[\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right]$

26. Mediante le formule di duplicazione trovare il valore di $\cos 2\alpha$:
$\cos\alpha = 3/4$ con $0° < \alpha < 90°$ [1/8]
$\operatorname{sen}\alpha = 1/4$ con $0° < \alpha < 90°$ [7/8]

27. Mediante le formule di bisezione trovare il valore di $\cos \alpha/2$:
$\cos\alpha = 1/2$ con $0° < \alpha < 90°$ $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$
$\operatorname{sen}\alpha = -1$ $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

TRIANGOLI RETTANGOLI



28. Trovare gli elementi incogniti di ABC sulla base di quelli noti:
$c = 20$ $\beta = 30°$ $[\alpha = 60°;\ b = 10;\ a = 10\sqrt{3}]$
$b = 10$ $c = 10\sqrt{2}$ $[a = 10;\ \beta = \alpha = 45°]$
$b = 13$ $\beta = 30°$ $[\alpha = 60°;\ a = 13\sqrt{3};\ c = 26]$

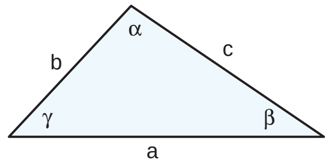
29. In un triangolo rettangolo ABC, rettangolo in C, sono dati l'ipotenusa c = 250 m e l'angolo $\beta = 39°$; determinare il perimetro. [601,61 m]

30. In un triangolo rettangolo ABC, rettangolo in C, sono dati l'ipotenusa c = 41 m e l'angolo $\alpha = 64{,}35°$; determinare l'area. [327,95 m^2]

31. In un triangolo rettangolo ABC, rettangolo in C, sono dati il cateto b = 88,75 m e l'angolo $\alpha = 32{,}78°$; determinare le lunghezze delle proiezioni (p e q) dei cateti sull'ipotenusa. [p = 74,61 m; q = 30,94 m]

32. In un triangolo isoscele ABC sono noti la base BC = 20 cm e gli angoli alla base $\beta = \gamma = 72°$; trovare il perimetro (2p) e l'area (S). [2p = 84,72 cm; S = 307,76 cm^2]

TRIANGOLI SCALENI



33. Tramite il teorema dei seni verificare che gli elementi $a = 200$, $b = 160$, $\alpha = 78{,}8°$ e $\beta = 51{,}7°$ sono lati e angoli di un triangolo.

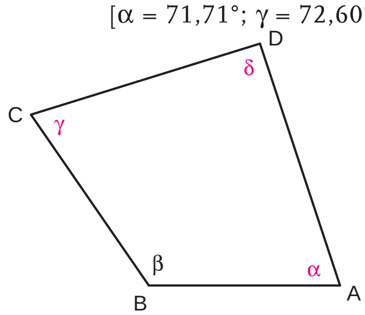
34. Essendo noti $a = 4\sqrt{3}$, $b = 4$ e $\gamma = 30°$, determinare mediante il teorema di Carnot gli elementi incogniti del triangolo. $[c = 4;\ \alpha = 120°;\ \beta = 30°]$

35. Essendo noti $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ e $c = 2$, determinare mediante il teorema di Carnot gli elementi incogniti del triangolo. $[\alpha = 60°;\ \beta = 30°;\ \gamma = 90°]$

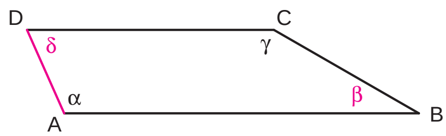
36. Essendo noti $a = 2$, $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, $\alpha = 75°$, determinare mediante il teorema dei seni gli elementi incogniti del triangolo. $[b = 2;\ \beta = 75°;\ \gamma = 30°]$

QUADRILATERI

37. Del quadrilatero ABCD sono noti: $\overline{AB} = 42{,}15$ m, $\overline{BC} = 45{,}76$ m, $\overline{CD} = 52{,}86$ m, $\overline{DA} = 56{,}15$ e $\beta = 124{,}60°$. Determinare gli elementi incogniti. $[\alpha = 71{,}71°;\ \gamma = 72{,}60°;\ \delta = 91{,}09°]$



38. Del quadrilatero ABCD sono noti: $\overline{AB} = 46{,}92$ m, $\overline{BC} = 22{,}15$ m, $\overline{CD} = 32{,}65$ m, $\alpha = 114°$ e $\gamma = 150°$. Determinare gli elementi incogniti. $[\overline{AD} = 12{,}11 \text{ m};\ \beta = 30°;\ \delta = 66°]$



39. Del quadrilatero ABCD sono noti: $\overline{AD} = 197{,}14$ m, $\overline{CD} = 374{,}65$ m, $\alpha = 121{,}50°$ e $\beta = 81{,}60°$, $\gamma = 68{,}33°$. Determinare gli elementi incogniti. $[\delta = 88{,}57°;\ \overline{AB} = 273{,}77 \text{ m};\ \overline{BC} = 359{,}65 \text{ m}]$