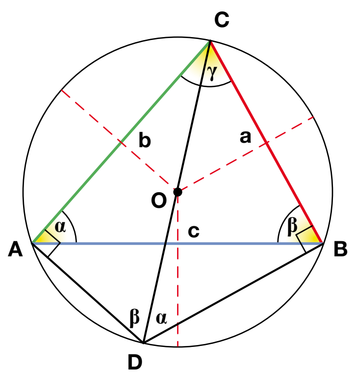
Approfondimento A3.1 – Dimostrazione del teorema dei seni

Uguaglianza tra il diametro della circonferenza circoscritta al triangolo e il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto

Nel triangolo qualsiasi ABC tracciamo la circonferenza circoscritta e, **partendo dal vertice C, tracciamo il diametro CD**.
Formiamo 2 triangoli rettangoli: CDA retto in A e CDB retto in B (*angoli alla circonferenza che insistono sul diametro*).
Inoltre:

- l'angolo **CDA = β** (*insiste sull'arco AC*);
- l'angolo **CDB = α** (*insiste sull'arco BC*).



Per definizione il seno di un angolo è

$$\frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}$$

quindi, nei due triangoli rettangoli:

$$\text{sen}\alpha = \frac{CB}{CD} = \frac{a}{2R}$$

$$\text{sen}\beta = \frac{CA}{CD} = \frac{b}{2R}$$

Si ottiene

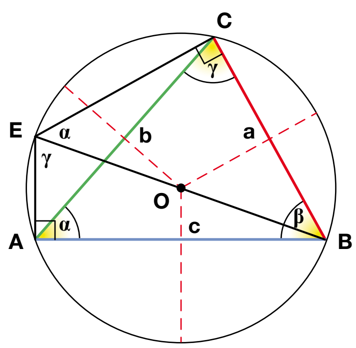
$$2R = \frac{a}{\text{sen}\alpha} \quad \text{e} \quad 2R = \frac{b}{\text{sen}\beta}$$

Quindi

$$2R = \frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta}$$

Nello stesso triangolo qualsiasi ABC, **partendo dal vertice B, tracciamo il diametro BE**.
Formiamo 2 triangoli rettangoli: BCE retto in C e BAE retto in A (*angoli alla circonferenza che insistono sul diametro*).
Inoltre:

- l'angolo **BEA = γ** (*insiste sull'arco AB*);
- l'angolo **BEC = α** (*insiste sull'arco CB*).



Per definizione il seno di un angolo è

$$\frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}$$

quindi, nei due triangoli rettangoli:

$$\text{sen}\alpha = \frac{CB}{EB} = \frac{a}{2R}$$

$$\text{sen}\gamma = \frac{AB}{EB} = \frac{c}{2R}$$

Si ottiene

$$2R = \frac{a}{\text{sen}\alpha} \quad \text{e} \quad 2R = \frac{c}{\text{sen}\gamma}$$

Quindi

$$2R = \frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{c}{\text{sen}\gamma}$$

Associando le due uguaglianze si ottiene:

$$2R = \frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma}$$