

Approfondimento A3.2 – Dimostrazione del teorema del coseno

Procedura sul lato "a"

Nel triangolo qualsiasi ABC tracciamo l'altezza AW relativa al lato CB.

Dal triangolo rettangolo AWB calcoliamo i cateti AW e BW

$$AW = c \operatorname{sen}\beta$$

$$BW = c \operatorname{cos}\beta$$

e poi CW per differenza

$$CW = CB - BW = a - (c \operatorname{cos}\beta)$$

Nel triangolo rettangolo AWC applichiamo il teorema di Pitagora:

$$b^2 = AW^2 + CW^2 = (c \operatorname{sen}\beta)^2 + (a - c \operatorname{cos}\beta)^2$$

Sviluppiamo il quadrato e il quadrato del binomio

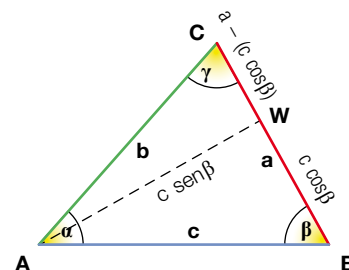
$$b^2 = c^2 \operatorname{sen}^2\beta + a^2 + c^2 \operatorname{cos}^2\beta - 2ac \operatorname{cos}\beta$$

Mettendo a fattor comune c^2 , si ottiene

$$b^2 = c^2 (\operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{cos}^2\beta) + a^2 - 2ac \operatorname{cos}\beta$$

con $(\operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{cos}^2\beta) = 1$ (I relazione fondamentale della goniometria):

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \operatorname{cos}\beta$$



Approfondimento A3.2 – Dimostrazione del teorema del coseno

Procedura sul lato "b"

Nel triangolo qualsiasi ABC tracciamo l'altezza CK relativa al lato AC.
Dal triangolo rettangolo BKC calcoliamo i cateti BK e CK

$$\mathbf{BK = a \operatorname{sen} \gamma}$$

$$\mathbf{CK = a \operatorname{cos} \gamma}$$

e poi AK per differenza

$$\mathbf{AK = CA - CK = b - (a \operatorname{cos} \gamma)}$$

Nel triangolo rettangolo AKB applichiamo il teorema di Pitagora:

$$\mathbf{c^2 = BK^2 + AK^2 = (a \operatorname{sen} \gamma)^2 + (b - a \operatorname{cos} \gamma)^2}$$

Sviluppiamo il quadrato e il quadrato del binomio

$$\mathbf{c^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 \gamma + b^2 + a^2 \operatorname{cos}^2 \gamma - 2ba \operatorname{cos} \gamma}$$

Mettendo a fattor comune $\mathbf{a^2}$, si ottiene

$$\mathbf{c^2 = a^2 (\operatorname{sen}^2 \gamma + \operatorname{cos}^2 \gamma) + b^2 - 2ba \operatorname{cos} \gamma}$$

con $(\operatorname{sen}^2 \gamma + \operatorname{cos}^2 \gamma) = 1$ (I relazione fondamentale della goniometria):

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ba \operatorname{cos} \gamma}$$

