UNITÀ E1

5. Baricentro di sezioni composte

Baricentro del trapezio

Il baricentro del trapezio (▶FIGURA 1) si trova sull'asse di simmetria obliqua (mediana) della figura; è sufficiente, quindi, determinare la sola ordinata y_G. A tal fine, il trapezio può essere scomposto nelle tre figure semplici 1, 2, 3, delle quali sono note l'area e il baricentro (▶TABELLA 1).

TABELLA 1

Sezioni elementari	Aree A_i (cm²)	Distanze y_i (cm)	Momenti statici $A_i\,y_i$ (cm³)
1	$\frac{ah}{2}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{ah^2}{6}$
2	bh	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^2}{2}$
3	$\frac{ch}{2}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{ch^2}{6}$

Il momento statico complessivo vale:

$$\Sigma_i\, A_i\, y_i = \frac{ah^2}{6} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^2}{6} = \frac{h^2}{6}(a + 3b + c) = \frac{h^2}{6}(B + 2b)$$

e l'area complessiva:

$$\Sigma_i\, A_i = \frac{ah}{2} + bh + \frac{ch}{2} = \frac{h}{2}(a + 2b + c) = \frac{h}{2}(B + b)$$

L'ordinata del baricentro è quindi:

$$y_G = \frac{\Sigma_i\, A_i\, y_i}{\Sigma_i\, A_i} = \frac{h}{3} \cdot \frac{B + 2b}{B + b} \qquad (8)$$

Esiste una interessante costruzione grafica, utilizzata con una certa frequenza (▶FIGURA 2). Si riporta la base minore sul prolungamento della base maggiore e,

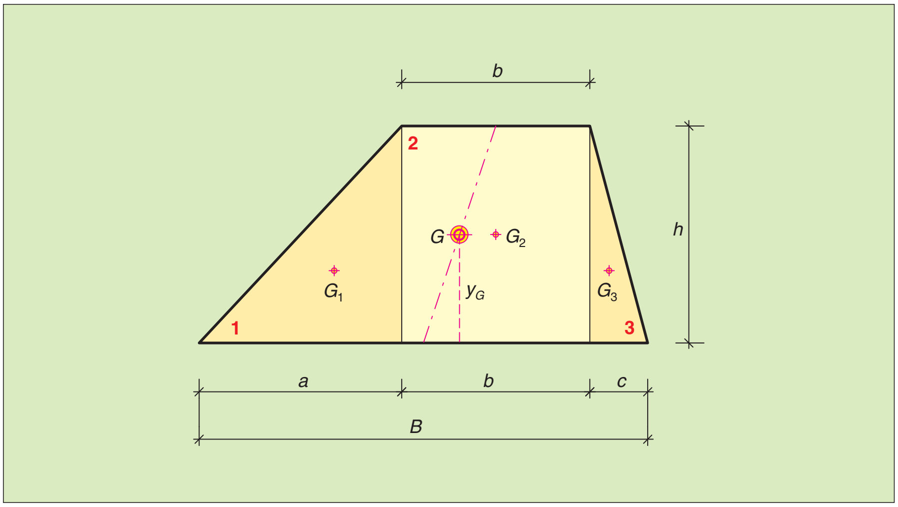

FIGURA 1 Baricentro del trapezio.

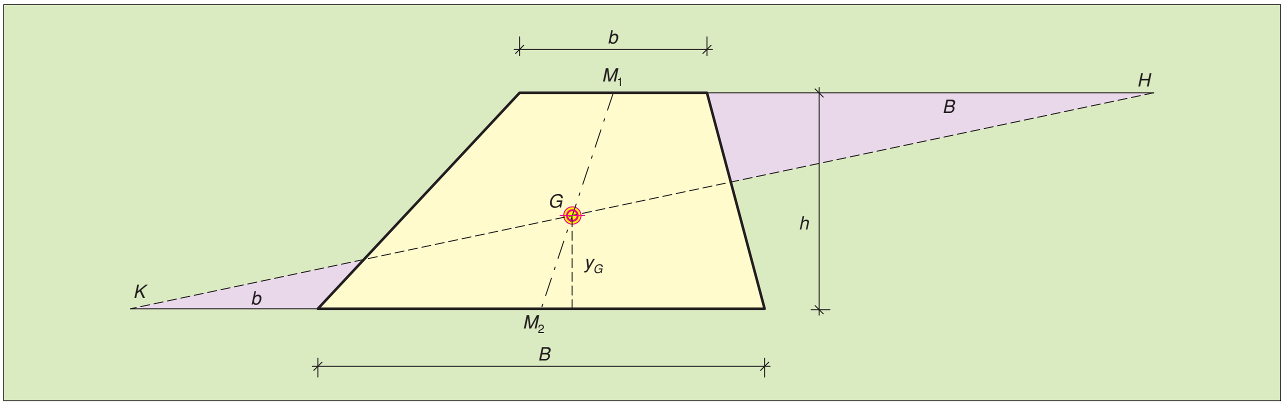

FIGURA 2 Baricentro del trapezio: determinazione grafica.

▶**1** Per la similitudine dei due triangoli GM_1H e GM_2K si può impostare la proporzione tra le basi e le altezze:

$$\left(\frac{B}{2}+b\right):y_G=\left(\frac{b}{2}+B\right):(h-y_G)$$

da cui:

$$\left(\frac{B}{2}+b\right)(h-y_G)=y_G\left(\frac{b}{2}+B\right)$$

Ricavando l'incognita y_G, dopo alcuni passaggi si ottiene un'espressione identica alla (8).

dalla parte opposta, si riporta la base maggiore sul prolungamento della base minore. L'intersezione tra la congiungente gli estremi dei due prolungamenti e l'asse mediano è il baricentro del trapezio (▶**1**).

Soluzione grafica dell'applicazione 1

Le aree delle figure elementari 1, 2, 3 vanno sostituite con un sistema di vettori di intensità pari a 300 cm², 300 cm², 500 cm², orientati in direzione x e concentrati nei baricentri G_1, G_2, G_3 (▶FIGURA 3). Si determina quindi la risultante e la sua retta d'azione, parallela all'asse x. Si orientano poi i vettori in direzione y e si determina la risultante e la sua retta d'azione, parallela all'asse y. L'intersezione delle rette d'azione delle due risultanti è il baricentro della sezione assegnata.

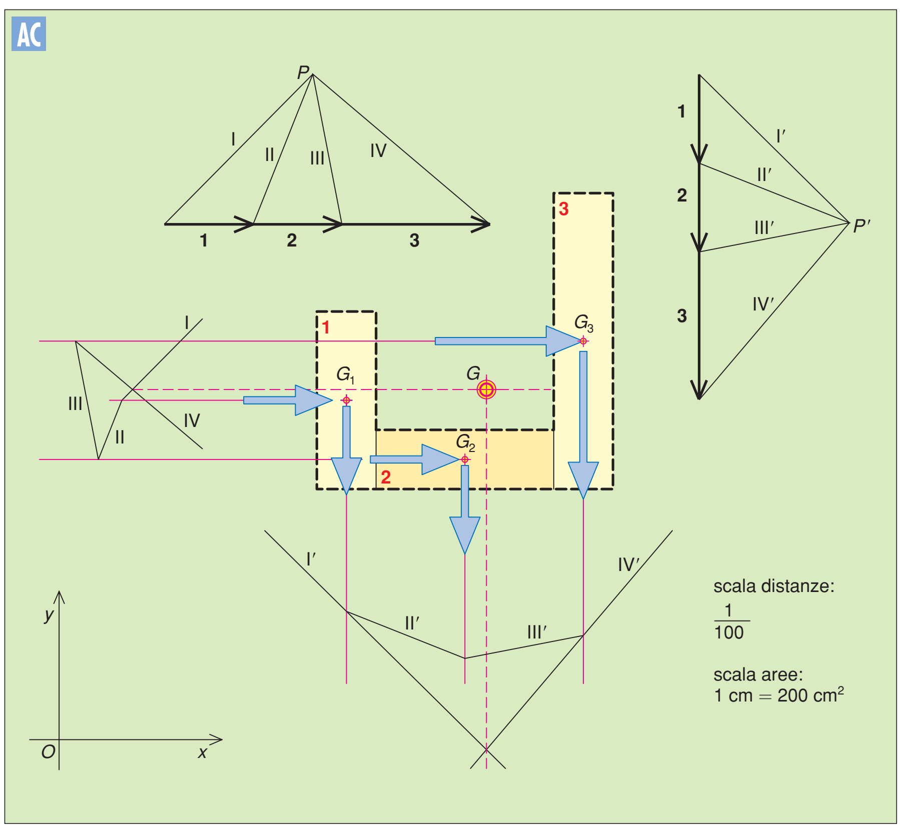

FIGURA 3 Baricentro: determinazione grafica.

Altre applicazioni

4 *Nella* ▶FIGURA 4 *è rappresentata, con tutte le misure in centimetri, la sezione di una* **trave a doppia *T*** *dotata di fori circolari che consentono il passaggio delle tubazioni degli impianti. Determinare il baricentro.*

Soluzione

La sezione possiede un asse verticale di simmetria retta: l'ascissa del baricentro è quindi nota e va ricercata la sola ordinata y_G. Scelto il riferimento cartesiano, la sezione va suddivisa in sezioni elementari (per esempio 1, 2, 3, 4, 5), di ognuna delle quali occorre calcolare l'area A_i, la distanza y_i del baricentro dall'asse x e il momento statico $A_i\, y_i$ relativo all'asse x. Alle aree *mancanti* 4 e 5 si deve attribuire segno negativo (▶TABELLA 2).

TABELLA 2

Sezioni elementari	Aree A_i (cm^2)	Distanze y_i (cm)	Momenti statici $A_i\, y_i$ (cm^3)
1	$30 \cdot 50 = 1500$	75	112 500
2	$15 \cdot 40 = 600$	40	24 000
3	$20 \cdot 30 = 600$	10	6000
4	$-\pi 5^2 = -78{,}54$	75	$-5890{,}5$
5	$-\pi 5^2 = -78{,}54$	75	$-5890{,}5$
	$\sum_i A_i = 2542{,}92$		$\sum_i A_i\, y_i = 130\,719$

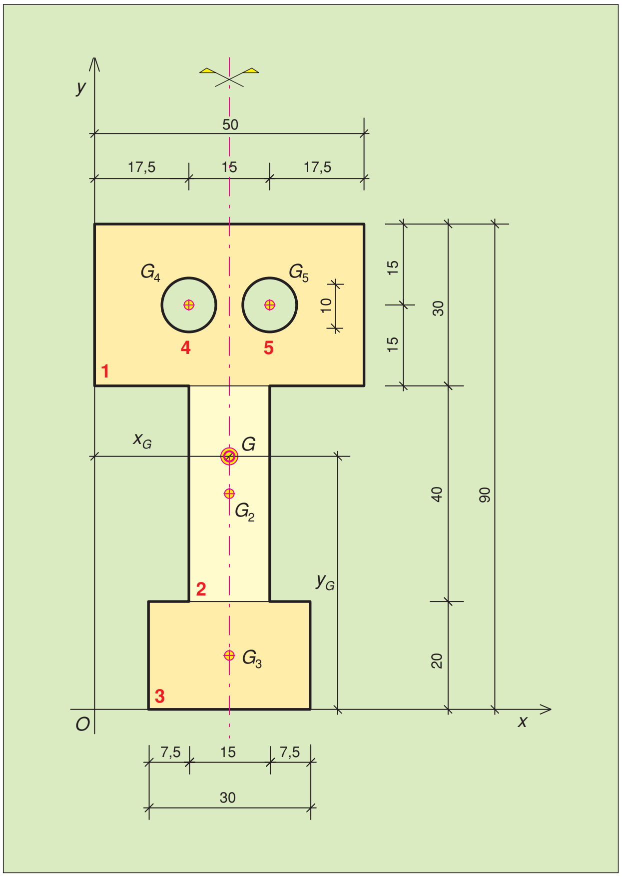

FIGURA 4 Trave a *doppia T* con fori circolari.

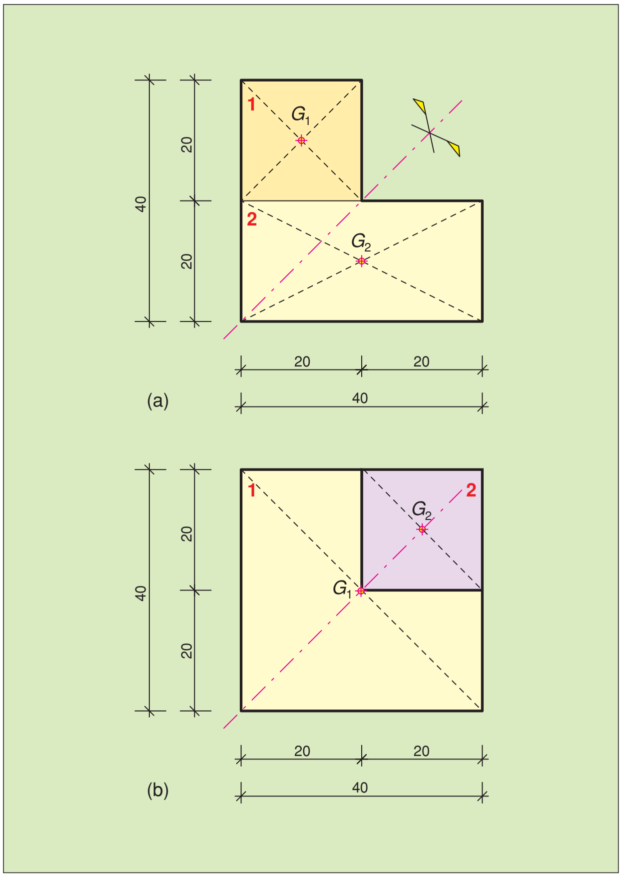

FIGURA 5 Trave a L.

L'ordinata del baricentro vale:

$$y_G = \frac{\sum_i A_i\, y_i}{\sum_i A_i} = \frac{130\,719}{2542{,}92} = 51{,}4 \text{ cm}$$

Nel sistema di riferimento adottato l'ascissa del baricentro, che si trova sull'asse y di simmetria, vale $x_G = 25$ cm.

5 *Si determini il baricentro della sezione a L della ▶FIGURA 5a.*

Soluzione analitica

La figura possiede un asse di simmetria retta inclinato di 45° rispetto all'orizzontale, sul quale si trova il baricentro. Essendo dunque $x_G = y_G$ è sufficiente determinare una sola coordinata.

Suddivisa la sezione assegnata in sezioni elementari e scelto il riferimento cartesiano, si calcola una qualsiasi delle due coordinate (per esempio x_G). Facendo riferimento ai dati riportati nella ▶TABELLA 3 risulta:

$$x_G = \frac{\sum_i A_i\, x_i}{\sum_i A_i} = \frac{20\,000}{1200} = 16{,}67 \text{ cm}$$

TABELLA 3

Sezioni elementari	Aree A_i (cm^2)	Distanze x_i (cm)	Momenti statici $A_i\, x_i$ (cm^3)
1	$40 \cdot 20 = 800$	20	16 000
2	$20 \cdot 20 = 400$	10	4000
	$\sum_i A_i = 1200$		$\sum_i A_i\, x_i = 20\,000$

Soluzione grafica

Con riferimento alla ▶FIGURA 6, si disegnano due vettori proporzionali alle aree 800 e 400 delle sezioni 1 e 2, passanti per i rispettivi baricentri. La posizione della risultante si può determinare con un poligono funicolare o anche con la costruzione relativa al sistema di due sole forze parallele (unità D2, paragrafo 5).

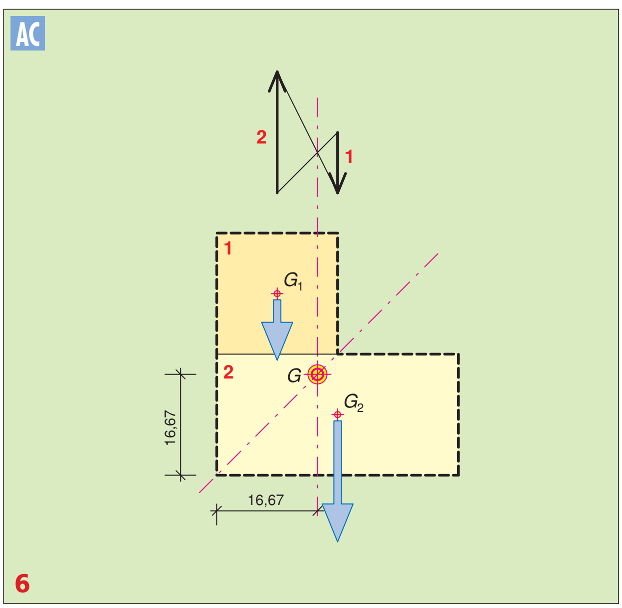

FIGURA 6 Ricerca grafica del baricentro.

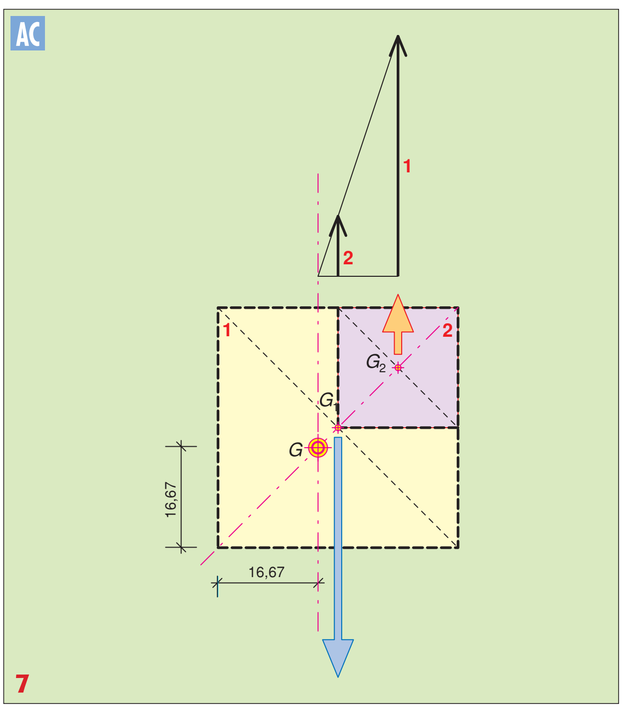

FIGURA 7 Ricerca grafica del baricentro, con diversa suddivisione.

È possibile suddividere la sezione in modo diverso; particolarmente interessante è la suddivisione eseguita nella ▶FIGURA 5*b*: la sezione 1 è un quadrato di lato 40; la sezione 2 è un quadrato di lato 20, ovviamente di area negativa.

Soluzione analitica

Tenendo conto dei dati della ▶TABELLA 4 si ha ancora:

$$x_G = \frac{\sum_i A_i x_i}{\sum_i A_i} = \frac{20\,000}{1200} = 16{,}67 \text{ cm}$$

TABELLA 4

Sezioni elementari	Aree A_i (cm²)	Distanze x_i (cm)	Momenti statici $A_i x_i$ (cm³)
1	$40 \cdot 40 = 1600$	20	32 000
2	$-20 \cdot 20 = -400$	30	−12 000
	$\sum_i A_i = 1200$		$\sum_i A_i x_i = 20\,000$

Soluzione grafica

La determinazione grafica del baricentro è indicata nella ▶FIGURA 7; il vettore che rappresenta l'area negativa ha verso opposto a quello del vettore che rappresenta l'area positiva.

6 *Si determini l'ordinata del baricentro della sezione di* ▶FIGURA 8. *La sezione è tipica delle travi in cemento armato precompresso.*

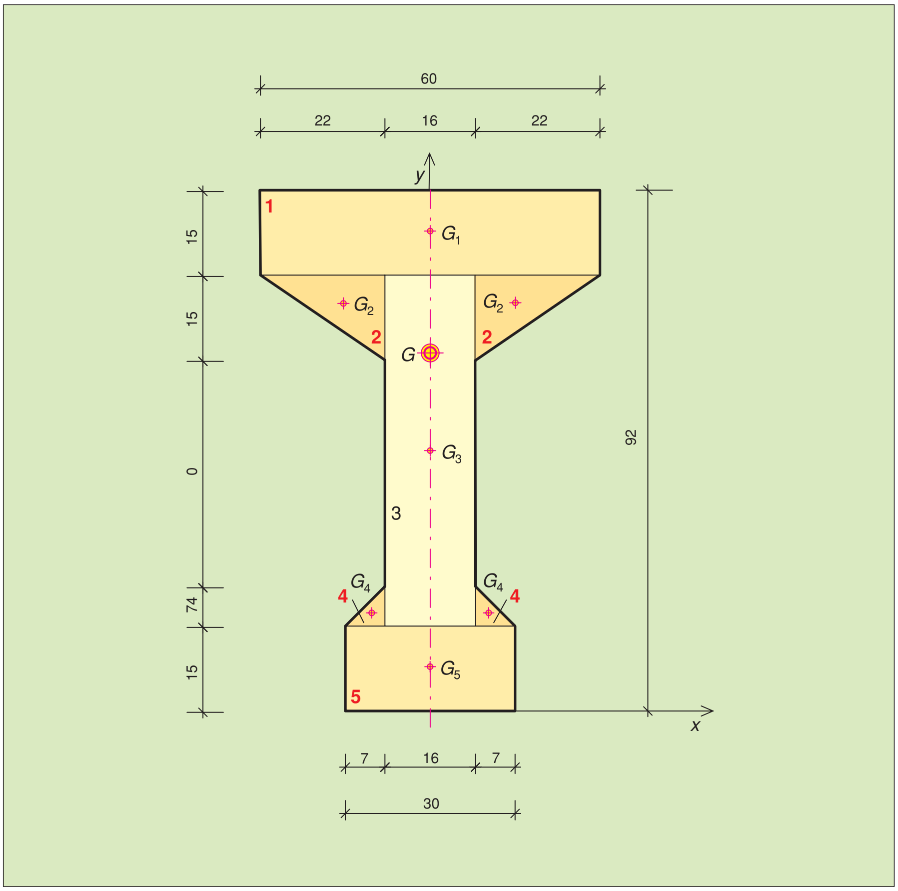

FIGURA 8 Sezione composta da figure rettangolari e triangolari.

Soluzione

La sezione presenta un asse verticale di simmetria; l'ascissa del baricentro è quindi nota (nel riferimento adottato si ha $x_G = 0$). La sezione è suddivisa nei rettangoli 1, 3, 5 e nei triangoli 2 e 4, di cui area e momento statico andranno conteggiati due volte. Elaborando i dati nel modo consueto (▶TABELLA 5) si ricava:

$$y_G = \frac{\sum_i A_i\, y_i}{\sum_i A_i} = \frac{143\,439{,}17}{2209} = 64{,}9 \text{ cm}$$

TABELLA 5

Sezioni elementari	Aree A_i (cm^2)	Distanze y_i (cm)	Momenti statici $A_i\, y_i$ (cm^3)
1	$60 \cdot 15 = 900$	84,5	76 050
2	$2\,(22 \cdot 15/2) = 330$	$62 + (2/3)\,15 = 72$	23 760
3	$16 \cdot 62 = 930$	46	42 780
4	$2\,(7 \cdot 7/2) = 49$	$15 + 7/3 = 17{,}33$	849,17
	$\sum_i A_i = 2209$		$\sum_i A_i\, y_i = 143\,439{,}17$