2. Sistemi continui: somma di infiniti termini infinitamente piccoli

UNITÀ E2

Esempi di calcolo per integrazione di aree elementari

Ci si propone di ritrovare per integrazione l'area, già nota, di alcune figure elementari. Si può scrivere, genericamente:

$$A = \int \mathrm{d}A$$

• Rettangolo

Si consideri (▶FIGURA 1) un rettangolo di base $b = 3$ e $h = 7$. Come è noto, la sua area vale $b \cdot h = 3 \cdot 7 = 21$.

La figura, disposta in un riferimento cartesiano, è divisa in infinite strisce parallele all'asse y, di larghezza infinitamente piccola dx. Per trovare l'area del rettangolo si devono sommare le infinite strisce di area infinitamente piccola:

$$\mathrm{d}A = y \cdot \mathrm{d}x = 7\,\mathrm{d}x$$

eseguendo l'integrazione della funzione $y = f(x) = 7$ nell'intervallo di variazione della variabile x, cioè tra i valori 2 e 5. Si ha:

$$A = \int_2^5 \mathrm{d}A = \int_2^5 7\,\mathrm{d}x = 7\int_2^5 dx = \left(\frac{5^1}{1} - \frac{2^1}{1}\right) = 7 \cdot 3 = 21$$

Allo stesso risultato si arriva dividendo la figura in strisce parallele all'asse x, di larghezza infinitesima dy (▶FIGURA 2). Per trovare l'area del rettangolo si devono sommare le infinite strisce di area infinitamente piccola:

$$\mathrm{d}A = x \cdot \mathrm{d}y = 3\,\mathrm{d}y$$

eseguendo l'integrazione della funzione $x = f(y) = 3$ nell'intervallo di variazione della variabile y, cioè tra i valori 0 e 7. Si ha:

$$A = \int_0^7 \mathrm{d}A = \int_0^7 3\,\mathrm{d}y = 3\left(\frac{7^1}{1} - \frac{0^1}{1}\right) = 3 \cdot 7 = 21$$

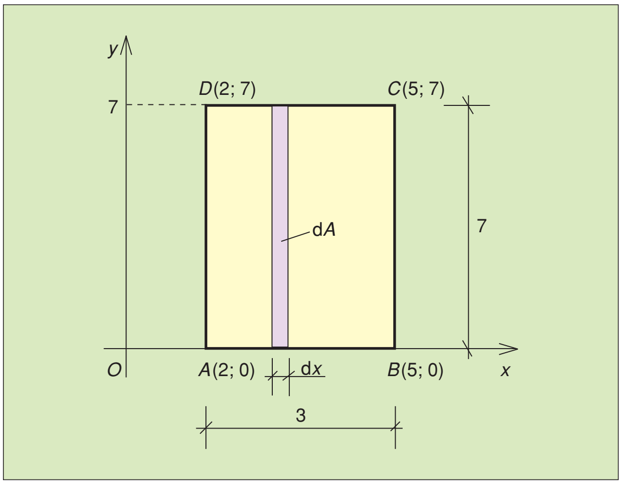

FIGURA 1 Area del rettangolo, ritrovata per integrazione della variabile *x*.

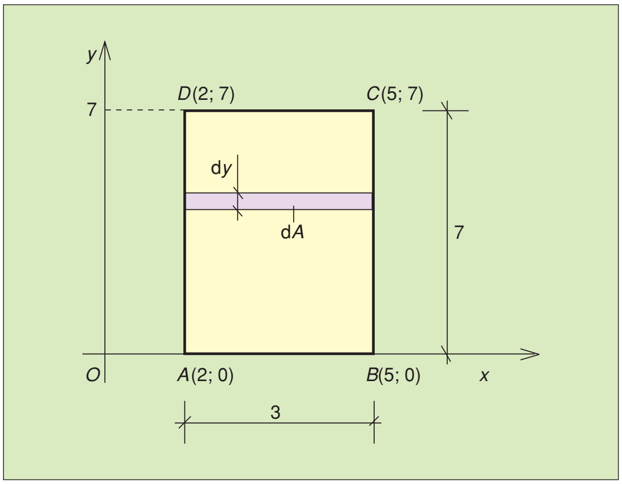

FIGURA 2 La variabile può essere *y*.

Triangolo

Si consideri (▶FIGURA 3) un triangolo ABC di base $b = 4$ e $h = 3$. La sua area vale:

$$\frac{bh}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

La figura, disposta in un riferimento cartesiano, è divisa in infinite strisce parallele all'asse x, di spessore infinitesimo dy. La larghezza x delle strisce varia in funzione della distanza y dal vertice C. Per la similitudine dei due triangoli aventi vertice comune C, si ha:

$$4 : x = 3 : y$$

e quindi:

$$x = \frac{4}{3} y$$

Per trovare l'area del triangolo si devono sommare le infinite strisce di area infinitamente piccola:

$$\mathrm{d}A = \frac{4}{3} y \, \mathrm{d}y$$

eseguendo l'integrazione nell'intervallo di variazione della variabile y, cioè tra i valori 0 e 3. Si ha:

$$A = \int_0^3 \mathrm{d}A = \int_0^3 \frac{4}{3} y \, \mathrm{d}y = \frac{4}{3} \int_0^3 y \, \mathrm{d}y = \frac{4}{3}\left(\frac{3^2}{2} - 0\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{2} = 6$$

Segmento parabolico

In un riferimento cartesiano, si consideri (▶FIGURA 4) la parabola di equazione $y = -x^2 + 1$. La curva interseca gli assi x, y nei punti (–1; 0), (1; 0), (0; 1). L'area del segmento parabolico si può ricavare con la formula riportata nella ▶FIGURA 9 dell'unità E1. Si ha:

$$\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{4}{3}$$

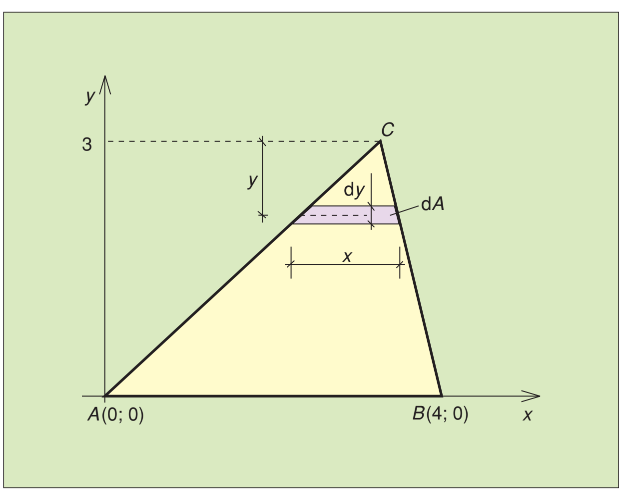

FIGURA 3 Area del triangolo, ritrovata per integrazione.

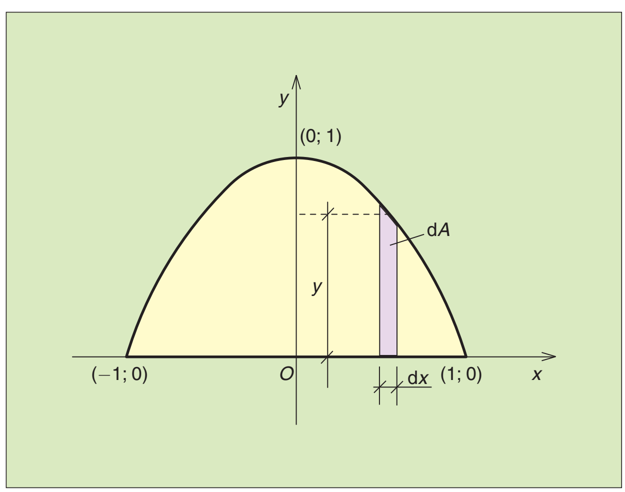

FIGURA 4 Area del segmento parabolico, ritrovata per integrazione.

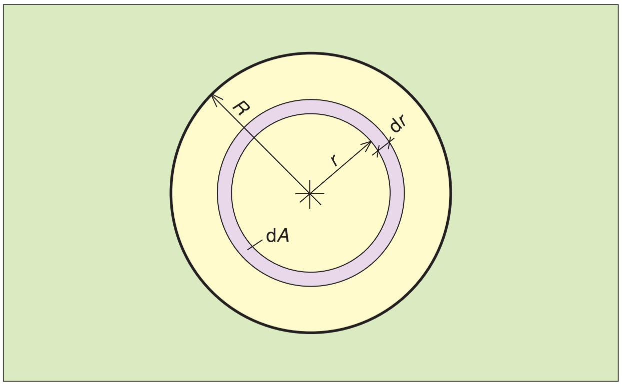

FIGURA 5 Area del cerchio, ritrovata per integrazione (la variabile è r).

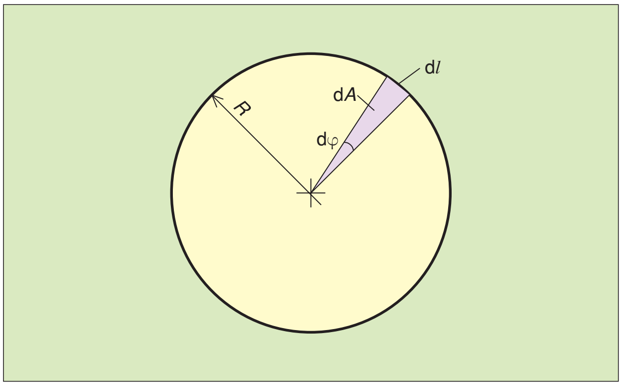

FIGURA 6 Area del cerchio, ritrovata per integrazione (la variabile è φ).

Per ritrovare lo stesso risultato utilizzando l'integrale, si suddivide la figura in strisce di area infinitesima:

$$\mathrm{d}A = y \cdot \mathrm{d}x = (-x^2 + 1)\,\mathrm{d}x$$

Eseguendo l'integrazione nell'intervallo di variazione della variabile x, cioè tra i valori –1 e 1; si ha:

$$A = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}A = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (-x^2)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1} -x^2\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x =$$

$$= -\left[\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right] + [1-(-1)] = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{-2+6}{3} = \frac{4}{3}$$

• Cerchio

A volte è più semplice utilizzare variabili diverse da quelle cartesiane x e y. Si consideri, per esempio, un cerchio di raggio R, di cui si vuole ritrovare la nota area πR^2 utilizzando l'integrale. Si divida la figura in corone circolari di spessore infinitesimo dr (▶FIGURA 5). Per trovare l'area del cerchio si devono sommare le infinite corone di area infinitamente piccola:

$$\mathrm{d}A = 2\pi r \cdot \mathrm{d}r$$

Eseguendo l'integrazione della funzione $A = f(r) = 2\pi r$ nell'intervallo di variazione della variabile r, cioè tra 0 e R, si ha:

$$A = \int_{0}^{R} \mathrm{d}A = \int_{0}^{R} 2\pi r\,\mathrm{d}r = 2\pi \int_{0}^{R} r\,\mathrm{d}r = 2\pi\left(\frac{R^2}{2} - 0\right) = \pi R^2$$

In alternativa, si può suddividere il cerchio in un numero infinito di settori circolari aventi angolo al centro infinitamente piccolo dφ (▶FIGURA 6). Approssimando l'area di ogni settore all'area dA del triangolo di base R e di altezza infinitesima dl = Rdφ, si ha:

$$\mathrm{d}A = \frac{R \cdot R^2\mathrm{d}\varphi}{2} = \frac{R^2}{2}\mathrm{d}\varphi$$

Eseguendo l'integrazione della funzione $R^2/2$ nell'intervallo di variazione della variabile φ, ossia tra l'angolo 0 e l'angolo 2π, si ottiene l'area del cerchio:

$$A = \int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}A = \int_{0}^{2\pi} \frac{R^2}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \cdot R^2 \int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \cdot R^2(2\pi - 0) = \pi R^2$$