7. Travi appoggiate: metodo generale

Se si riesce a *trasformare* la trave appoggiata in una mensola, le sue deformazioni si possono calcolare con gli stessi criteri del paragrafo precedente. Deve trattarsi naturalmente di una *mensola equivalente*, che si deforma esattamente come la trave appoggiata originaria.

Si vogliano determinare per esempio le rotazioni massime (sugli appoggi) e la freccia massima (in mezzeria) della trave appoggiata soggetta a carico uniformemente distribuito. Per simmetria, sono uguali le reazioni sugli appoggi. Si ha:

$$Y_A = Y_B = \frac{pl}{2}$$

• Rotazioni sugli appoggi (▶FIGURA 1)

Ancora per simmetria, le rotazioni sugli appoggi sono di uguale valore e di segno opposto.

Per trasformare la trave appoggiata nella mensola equivalente (cui applicare il metodo cinematico) bisogna compiere i due passaggi seguenti.

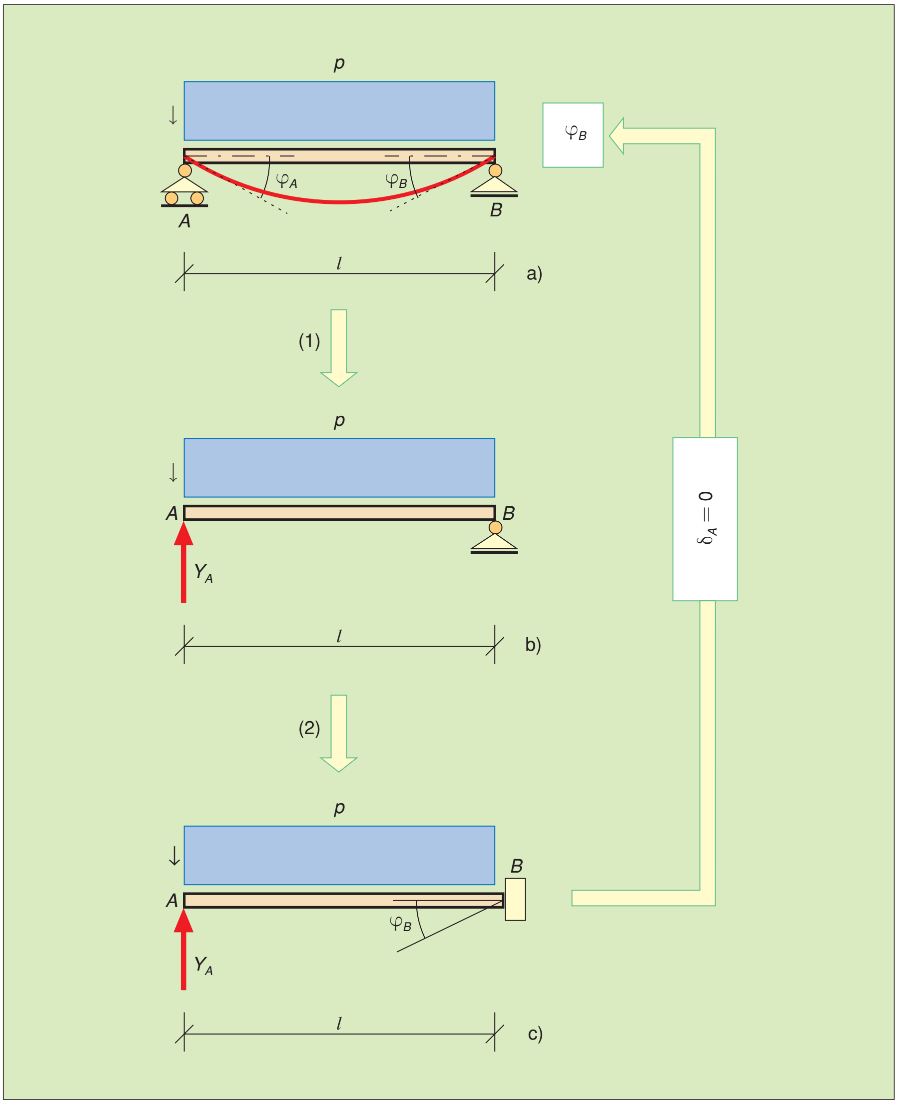


FIGURA 1 Trave appoggiata: rotazioni degli appoggi.

1) Si sopprime l'appoggio A sostituendolo con la reazione Y_A.
2) Si sostituisce l'appoggio B con un incastro in cui sia già avvenuta la stessa rotazione φ_B (tuttora incognita) consentita dall'originario vincolo a cerniera.

Così facendo la trave originaria è stata trasformata in una mensola; questa mensola è del tutto equivalente se subisce, sotto lo stesso carico, le stesse deformazioni della trave originaria. Poiché si è intervenuti nelle sezioni di vincolo, è in queste sezioni che devono avvenire solo **movimenti compatibili** (o *congruenti*) con i vincoli originari.

Nella sezione B si hanno deformazioni identiche alla trave originaria (spostamento nullo e rotazione pari a φ_B).

La sezione A, invece, è libera non solo di ruotare (il che era consentito anche nella trave originaria) ma anche di subire lo spostamento δ_A che nella trave originaria era impedito. Occorre dunque **ripristinare la compatibilità** (o *coerenza* o *congruenza*) del movimento nella sezione A imponendo che sia:

$$\delta_A = 0 \tag{1}$$

Equazioni come la (1), che impongono che le deformazioni elastiche della trave equivalente siano **congruenti** (compatibili, coerenti) con quelle della trave originaria sono chiamate **equazioni di elasticità** o **equazioni di congruenza**.

Per esplicitare l'equazione di congruenza basta applicare la composizione cinematica dei movimenti. Si ha:

$$\delta_A = \delta_A(Y_A) + \delta_A(p) + \delta_A(\varphi_B) = 0$$

Gli spostamenti elastici $\delta_A\,(Y_A)$ e $\delta_A\,(p)$ si calcolano con l'aiuto della tabella CS1, ricordando che $Y_A = pl\,/\,2$ e facendo attenzione ai segni. Lo spostamento $\delta_A\,(\varphi_B)$ dovuto alla rotazione rigida (tuttora incognita) φ_B vale invece $\varphi_B \cdot l$. Sostituendo, si ottiene:

$$\delta_A = -\frac{pl^4}{6EI} + \frac{pl^4}{8EI} + \varphi_B \cdot l = 0$$

da cui segue:

$$\varphi_B = \frac{pl^3}{24EI}$$

Il segno positivo assicura che il senso ipotizzato (antiorario) è corretto. La rotazione sull'appoggio A risulta, per simmetria, di uguale valore, ma di senso opposto. Si può quindi scrivere:

$$\varphi_A = -\,\varphi_B = \frac{pl^3}{24EI}$$

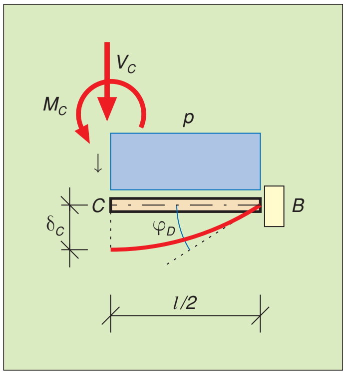


FIGURA 2 Trave appoggiata: freccia in mezzeria.

• Freccia in mezzeria (▶FIGURA 2)

Nella mensola equivalente si considera elastica soltanto la semitrave BC, soggetta in C alle sollecitazioni che equivalgono all'azione della parte CA rimasta rigida. Calcolando con le forze che precedono, si ottengono i valori (già noti):

$$V_C = +\frac{pl}{2} - p \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$M_C = +\frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{4} = +\frac{pl^2}{8}$$

La freccia δ_C si determina con il metodo cinematico:

$$\delta_C = \delta_C(M_C) + \delta_C(p) + \delta_C(\varphi_B)$$

I primi due termini si calcolano con l'aiuto della tabella CS1; il terzo termine è dato da $\varphi_B(l/2)$, dove φ_B è ormai noto. Si ha:

$$\delta_C(M_C) = -\frac{pl^2}{8} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2EI} = -\frac{pl^4}{64EI}$$

$$\delta_C(p) = +p \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{8EI} = \frac{pl^4}{128EI}$$

$$\delta_C(\varphi_B) = \varphi_B \cdot \frac{l}{2} = \frac{pl^3}{24EI} \cdot \frac{l}{2} = \frac{pl^4}{48EI}$$

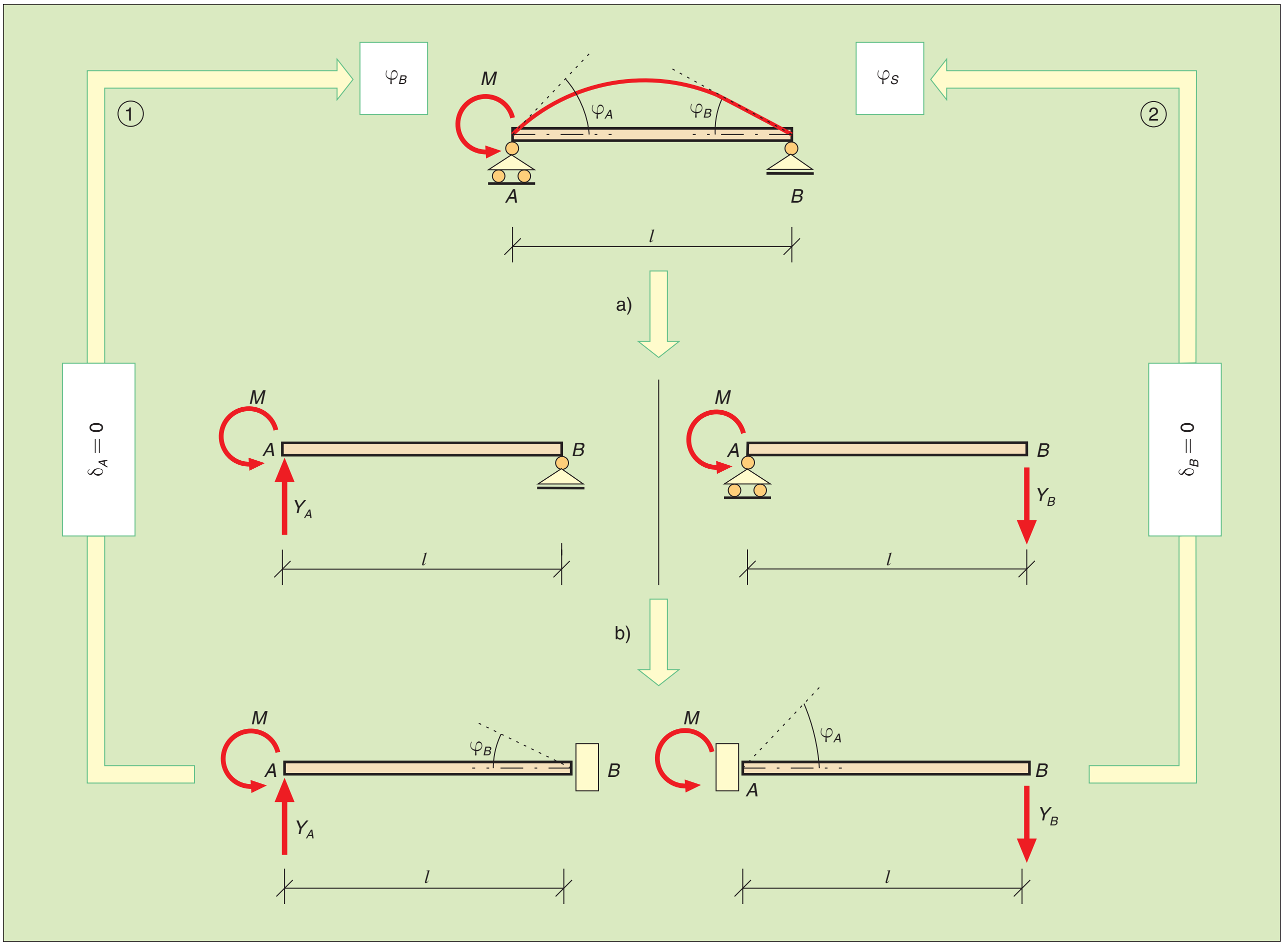
Dopo alcune semplificazioni si ottiene:

$$\boxed{\delta_C = \frac{5}{384} \cdot \frac{pl^4}{EI}}$$

Esempi

1 *Coppia concentrata su uno dei due appoggi* (▶FIGURA 3).

FIGURA 3 Trave appoggiata: coppia concentrata su uno dei due appoggi.



Poiché la trave non è simmetrica, occorre calcolare entrambe le rotazioni.

- Il *percorso* 1 porta al calcolo di φ_B.

a) L'appoggio A è sostituito dalla sua reazione ($Y_A = M / l$ rivolta verso l'alto).
b) L'appoggio B è sostituito da quel particolare incastro in cui è già avvenuta la rotazione rigida φ_B.

Nella sezione A occorre *ripristinare la congruenza* dei movimenti imponendo $\delta_A = 0$, ossia:

$$\delta_A(M) + \delta_A(Y_A) + \delta_A(\varphi_B) = 0$$

Sostituendo si ha:

$$+\frac{Ml^2}{2EI} - \frac{M}{l} \cdot \frac{l^3}{3EI} - \varphi_B \cdot l = 0$$

La sola incognita è la rotazione cercata φ_B. Risulta:

$$\varphi_B = \frac{Ml}{6EI} \quad \text{destrogira}$$

- Il *percorso* 2 porta al calcolo di φ_A.

a) L'appoggio B è sostituito dalla sua reazione ($Y_B = M / l$ rivolta verso il basso).
b) L'appoggio A è sostituito da quel particolare incastro in cui è già avvenuta la rotazione rigida φ_A.

L'equazione di congruenza della sezione B è:

$$\delta_B = 0$$

Poiché il momento M (applicato su una sezione incastrata) non provoca alcuna deformazione, si ha:

$$+\delta_B(Y_B) + \delta_B(\varphi_A) = 0$$

e, sostituendo:

$$\frac{M}{l} \cdot \frac{l^3}{3EI} - \varphi_A \cdot l = 0$$

La sola incognita è la rotazione cercata φ_A. Risulta:

$$\varphi_A = \frac{Ml}{3EI} \quad \text{sinistrogira}$$

La rotazione dell'appoggio su cui è applicata la coppia è il doppio della rotazione dell'altro appoggio.

2 *Coppia concentrata su ciascuno dei due appoggi* (▶FIGURA 4).

Si può applicare il PSE ai risultati dell'applicazione precedente. Dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$\varphi_A = \frac{(2M_A + M_B)l}{6EI} \quad \text{sinistrogira}$$

$$\varphi_B = \frac{(M_A + 2M_B)l}{6EI} \quad \text{destrogira}$$

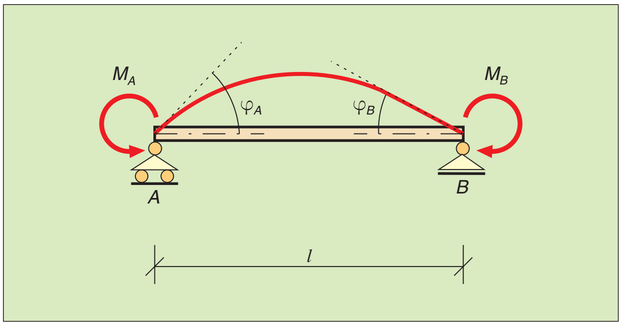


FIGURA 4 Trave appoggiata: coppia concentrata su ciascuno dei due appoggi.

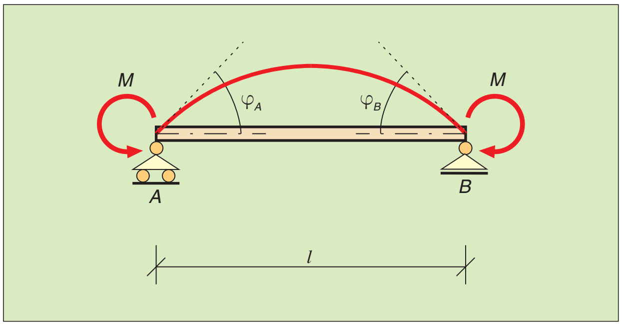


FIGURA 5 Trave appoggiata: coppie simmetriche sui due appoggi.

Se i momenti applicati hanno la stessa intensità (▶FIGURA 5), basta sostituire nella formula precedente il valore $M_A = M_B = M$ per ottenere:

$$-\varphi_A = \varphi_B = \frac{Ml}{2EI}$$

Altri casi notevoli di travi appoggiate sono riportati nella tabella CS1 del *Prontuario*. Tutti i risultati possono essere ritrovati seguendo il procedimento illustrato nelle precedenti applicazioni.