

7. Metodo delle deformazioni

Il procedimento fin qui utilizzato per la risoluzione degli elementi iperstatici è chiamato **metodo delle forze** e si sviluppa secondo i seguenti passaggi:

- si diminuisce il grado di vincolo dell'elemento strutturale, fino a renderlo isostatico;
- si assumono come incognite iperstatiche le **forze** (o i momenti) di nodo;
- si impone il rispetto dell'equilibrio elastico, ossia la coerenza delle deformazioni con i vincoli iniziali.

Tra gli infiniti insiemi di valori che soddisfano l'equilibrio del corpo rigido, il metodo delle forze calcola l'unico che soddisfa anche l'equilibrio elastico.

Quando il grado di iperstaticità è alto, altrettanto alto è il numero delle incognite e delle equazioni; la scrittura di queste ultime, inoltre, è laboriosa e possono facilmente sfuggire errori di segno.

Queste difficoltà si possono in parte superare utilizzando un altro metodo di risoluzione degli elementi iperstatici, il **metodo delle deformazioni**, che si può considerare perfettamente *speculare* al metodo delle forze. Esso, infatti, si sviluppa secondo i seguenti passaggi:

- si aumenta il grado di vincolo dell'elemento strutturale, rendendo perfettamente rigidi (incastri) i nodi in cui concorrono almeno due aste;
- si assumono come incognite iperstatiche le **deformazioni**, cioè le rotazioni di tali nodi (►1) che, per l'equilibrio elastico, sono identiche per tutte le aste;
- si impone il rispetto dell'equilibrio del corpo rigido.

Tra gli infiniti insiemi di valori che soddisfano l'equilibrio elastico, il metodo delle deformazioni calcola l'unico che soddisfa anche l'equilibrio del corpo rigido.

Per applicare il metodo è necessario conoscere:

- la definizione di *rigidezza alla rotazione* di un'asta;
- le *modalità di ripartizione* dei momenti di nodo sulle aste concorrenti.

■ Rigidezza alla rotazione

Si consideri una trave appoggiata in A . Si definisce **rigidezza alla rotazione** R_A il valore del momento che bisogna applicare in A per ottenere, sempre in A , la rotazione unitaria.

Le travi fondamentali delle quali occorre conoscere la rigidezza alla rotazione sono riportate nella ►FIGURA 1. Caricando in A le travi con il momento incognito R_A e imponendo che la rotazione φ_A (ricavata dalla tabella CS2) sia unitaria, si ottengono i seguenti risultati.

a) *Appoggio semplice*. Deve essere:

$$\varphi_A = \frac{R_A l}{3EI} = 1$$

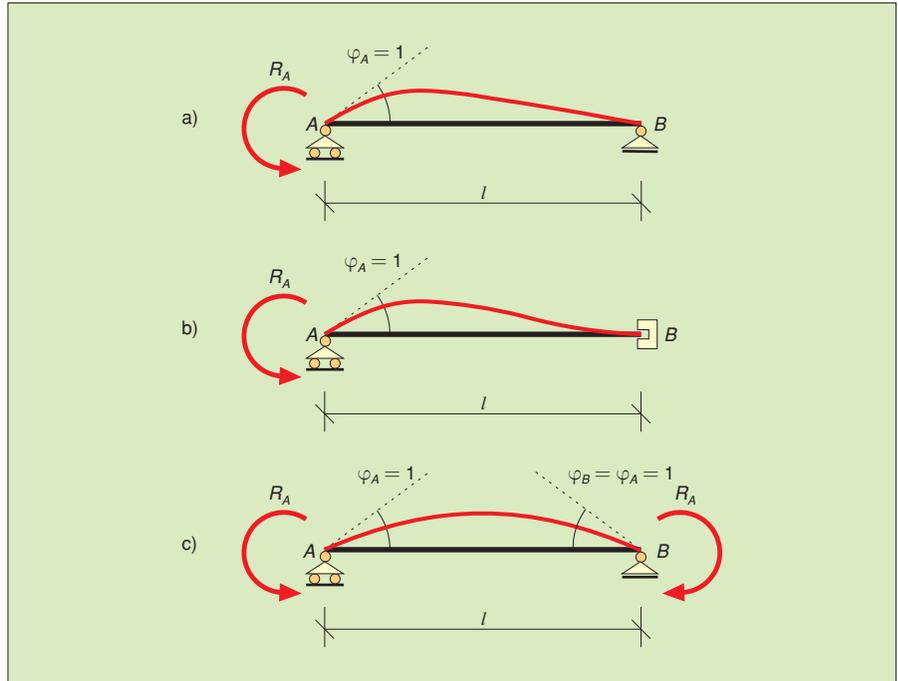
da cui segue:

$$R_A = 3 \frac{EI}{l}$$



►1 Si fa ancora riferimento ad elementi a nodi fissi, in cui le deformazioni nei nodi coincidono con le rotazioni (gli spostamenti sono nulli).

FIGURA 1 Rigidezze: casi fondamentali.



b) *Appoggio-incastro*. Deve essere:

$$\varphi_A = \frac{R_A l}{4EI} = 1$$

da cui segue:

$$R_A = 4 \frac{EI}{l}$$

c) *Trave simmetrica*. Deve essere:

$$\varphi_A = \frac{R_A l}{2EI} = 1$$

da cui segue:

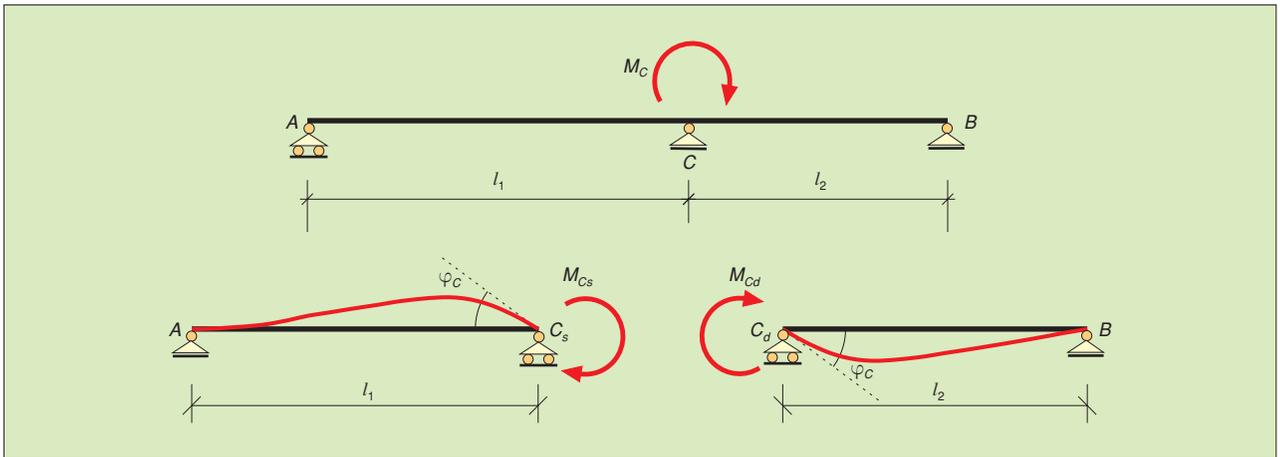
$$R_A = 2 \frac{EI}{l}$$

■ Ripartizione del momento di nodo

Data una trave continua a due campate (► FIGURA 2) di rigidezza EI uniforme, caricata da una coppia esterna M_C sull'appoggio centrale C , si vogliono conoscere i momenti M_{Cs} e M_{Cd} . In altre parole, si vuole sapere in quale proporzione il momento applicato M_C si ripartisce sulle due aste convergenti nel nodo C .

Invece di considerare incogniti i momenti sull'appoggio C (metodo delle forze) si può applicare il metodo delle deformazioni, considerando come incognita la rotazione φ_C del nodo, che è identica per tutte le aste convergenti.

Le rigidezze delle due campate R_{Cs} e R_{Cd} sono i momenti che provocano in C la rotazione unitaria. I momenti in C competenti alle singole aste si possono



dunque trovare moltiplicando le rigidzze per la rotazione effettiva φ_C , tuttora incognita ma identica per entrambe le aste. Si ha:

$$M_{Cs} = \varphi_C \cdot R_{Cs}$$

$$M_{Cd} = \varphi_C \cdot R_{Cd}$$

Per l'equilibrio del corpo rigido, la somma dei momenti di nodo deve uguagliare il momento applicato M_C . Si ha:

$$M_C = M_{Cs} + M_{Cd} = \varphi_C (R_{Cs} + R_{Cd})$$

Quando, in generale, nel nodo convergono più di due aste (si pensi ai telai), si può scrivere:

$$M_C = \sum_i M_{Ci} = \varphi_C \cdot \sum_i R_{Ci}$$

e quindi, infine:

$$\varphi_C = \frac{M_C}{\sum_i R_{Ci}}$$

Determinata la rotazione, il calcolo dei momenti che si ripartiscono nelle varie aste è immediato. Si ha:

$$M_{Cs} = \varphi_C \cdot R_{Cs} = M_C \frac{R_{Cs}}{\sum_i R_{Ci}} \quad M_{Cd} = \varphi_C \cdot R_{Cd} = M_C \frac{R_{Cd}}{\sum_i R_{Ci}}$$

e, in generale:

$$M_{Ci} = M_C \frac{R_{Ci}}{\sum_i R_{Ci}}$$

Il momento applicato in un nodo si ripartisce tra le aste concorrenti in modo proporzionale alla rigidzza delle aste stesse.

I rapporti $R_{Ci} / \sum R_{Ci}$ sono anche chiamati **coefficienti di ripartizione** relativi al nodo C; la loro somma è sempre uguale a 1.

FIGURA 2 Ripartizione del momento di nodo.

■ Esempio

Considerata la trave continua di ► FIGURA 3a, la risoluzione si sviluppa secondo i seguenti passaggi.

● Determinazione delle rigidzze e dei coefficienti di ripartizione relativi al nodo C

Si ha, per le rigidzze:

- asta C_sA (appoggio semplice):

$$R_{Cs} = 3 \frac{EI}{l} = 3 \frac{EI}{4} = 0,75 EI$$

- asta C_dB (appoggio-incastro):

$$R_{Cd} = 4 \frac{EI}{l} = 4 \frac{EI}{3} = 1,33 EI$$

e quindi:

$$\Sigma_i R_{Ci} = (0,75 + 1,33) EI = 2,08 EI$$

I coefficienti di ripartizione valgono:

- per l'asta C_sA :

$$\frac{R_{Cs}}{\Sigma_i R_{Ci}} = \frac{0,75}{2,08} = 0,36$$

- per l'asta C_dB :

$$\frac{R_{Cd}}{\Sigma_i R_{Ci}} = \frac{1,33}{2,08} = 0,64$$

Essi vanno riportati, dalla giusta parte, vicino al nodo C.

● Aumento del grado di iperstaticità della trave

Si immagini di applicare nel nodo C un morsetto che ne impedisca completamente la rotazione: l'iperstaticità della trave è aumentata e le due campate si comportano come due travi indipendenti perfettamente incastrate in C (► FIGURA 3b). Nascono quindi in C due momenti (inesistenti nella trave reale) detti **momenti di incastro perfetto** e indicati col simbolo $M(I)$. Essi valgono (tabella CS2):

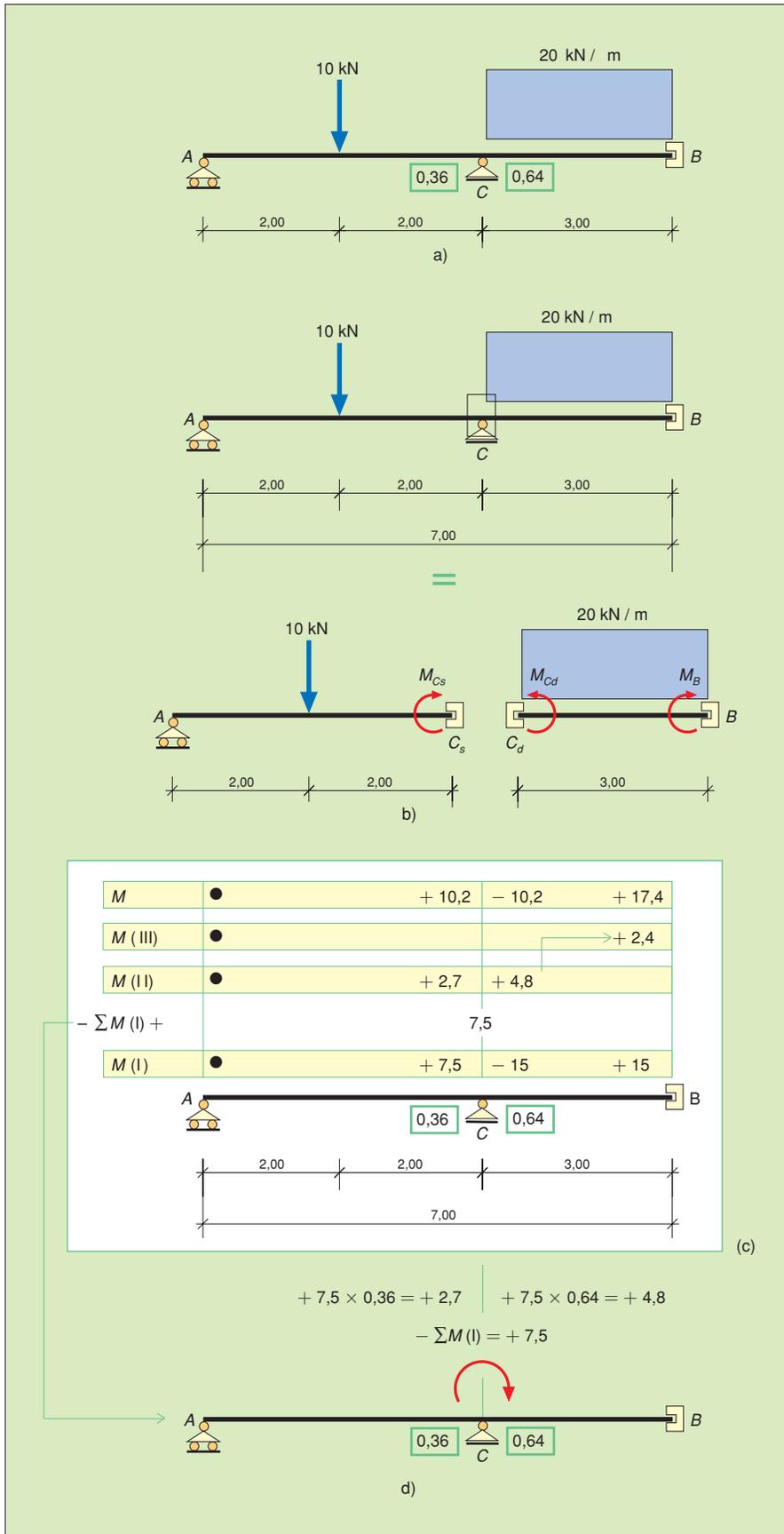
- per la trave C_sA (incastro-appoggio):

$$M_{Cs}(I) = + \frac{3}{16} Pl = + \frac{3}{16} \cdot 10 \cdot 4 = + 7,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- per la trave C_dB (doppio incastro):

$$M_{Cd}(I) = - \frac{pl^2}{12} = - \frac{20 \cdot 3^2}{12} = - 15 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

FIGURA 3 Metodo delle deformazioni.



Naturalmente, anche nella sezione B , dove esiste un incastro effettivo, si ha il momento d'incastro perfetto:

$$M_B(I) = -M_{Cd}(I) = +15 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

I momenti $M(I)$ di incastro perfetto vanno riportati nella giusta posizione (► FIGURA 3c). Per evitare confusione, è opportuno attribuire segno positivo ai momenti destrogiri e segno negativo ai momenti sinistrogiri.

• Ripristino dell'equilibrio nel nodo C

Il nodo C , cui è stato complessivamente attribuito il momento di incastro perfetto in realtà inesistente:

$$\Sigma M_C(I) = +7,5 - 15 = -7,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

deve essere riequilibrato aggiungendo il momento uguale e opposto (momento equilibrante):

$$-\Sigma M_C(I) = +7,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

L'operazione equivale in tutto e per tutto a rimuovere il morsetto, consentendo nuovamente la rotazione. Il momento equilibrante va anch'esso riportato nello schema risolutivo della ► FIGURA 3c.

• Ripartizione del momento equilibrante

La trave si trova ora nelle condizioni della ► FIGURA 3d; il momento equilibrante $-\Sigma M_C(I)$ va ripartito proporzionalmente ai coefficienti di ripartizione delle aste convergenti nel nodo C . I **momenti di ripartizione** $M_C(II)$, che hanno lo stesso segno del momento $-\Sigma M_C(I)$, valgono:

$$M_{Cs}(II) = +0,36 \cdot 7,5 = +2,7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{Cd}(II) = +0,64 \cdot 7,5 = +4,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

e vanno anch'essi riportati nello schema risolutivo della ► FIGURA 3c.

• Trasmissione dei momenti di ripartizione

Se all'altra estremità delle aste esistono (come in questo caso nella sezione B) incastri effettivi, ad essi compete un **momento di trasmissione** $M(III)$ di uguale segno e di modulo pari alla metà del momento di ripartizione (► 2). In questo caso, il momento trasmesso dal nodo C all'incastro B vale:

$$M_B(III) = \frac{1}{2} M_{Cd}(II) = \frac{4,8}{2} = 2,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

da riportare, come sempre, nello schema risolutivo della ► FIGURA 3c.

Sommando alle estremità di ogni asta i momenti d'incastro perfetto, di ripartizione e di trasmissione si hanno i momenti effettivi di nodo.

Risulta:

$$M_{Cs} = +7,5 + 2,7 = +10,2 \text{ kN} \cdot \text{m} \text{ destrogiri}$$

$$M_{Cd} = -15 + 4,8 = -10,2 \text{ kN} \cdot \text{m} \text{ sinistrogiri}$$

$$M_B = +15 + 2,4 = +17,4 \text{ kN} \cdot \text{m} \text{ destrogiri}$$

► 2 Si riveda, a questo proposito, la trave considerata nel paragrafo 3.

Si noti che tutti i momenti sono in realtà negativi, perché tendono le fibre superiori. Si noti inoltre che, come deve essere se non vi sono coppie esterne applicate, il momento flettente nel nodo C ha valore univoco.

■ Conclusioni

Il metodo delle deformazioni, indubbiamente meno spontaneo e intuitivo del metodo delle forze, ha il vantaggio di richiedere calcoli molto più rapidi e di offrire, per elementi strutturali poco iperstatici, soluzioni quasi immediate. Le espressioni si complicano di poco, e soltanto nella determinazione dei coefficienti di ripartizione, nel caso di aste concorrenti di diversa rigidezza EI .

Il metodo è decisamente vantaggioso per la risoluzione di elementi fortemente iperstatici. Per i telai a nodi fissi il procedimento è concettualmente analogo a quello seguito nel semplice caso della trave a due campate. Occorre però sbloccare ed equilibrare un morsetto per volta: equilibrato un nodo e ripartito il suo momento, esso viene nuovamente squilibrato dal momento di trasmissione proveniente dal nodo adiacente. Si deve quindi ripetere più volte il procedimento, finché i momenti di trasmissione diventano così piccoli da potere essere trascurati. Con questo procedimento iterativo (detto *metodo di Cross*) si potevano risolvere abbastanza agevolmente telai a nodi fissi anche di configurazione complessa.

Il metodo di Cross, e altri metodi iterativi, sono oggi superati dall'ampia disponibilità di software di calcolo.